Муниципальный тур ВСОШ олимпиады по математике (2020/2021 уч. год)

Ответы и решения заданий

Общие критерии оценивания каждой задачи:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задания для 9 класса

Задача № 1

Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол так, чтобы они не накладывались друг на друга и не выступали за край стола. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

Ответ: выиграет первый.

Решение.

Нам нужно найти такую последовательность ходов, которая позволила бы, глядя на ходы соперника, делать ходы, которые привели бы к победе. Как же ходить после хода соперника? Стол круглый, поэтому первый ход: положить пятак в центр доски. А дальше? А дальше — по симметрии, относительно центра стола! И понятно, что первый выиграет, так как, если второй нашел место, куда положить свою монетку, то для первого останется свободным место симметричное относительно данного хода соперника. Поэтому его ход будет всегда последним.

Задача № 2

Помощник капитана, наблюдавший за погрузкой судна, выкуривал одну трубочку за другой с самого начала погрузки. Когда 2/3 от количества погруженных контейнеров стало равным 4/9 количества непогруженных, и склянки пробили полдень, старый морской волк начал раскуривать очередную трубку. Когда он ее докурил, отношение количества погруженных контейнеров к количеству непогруженных стало обратным отношению, которое было до выкуривания этой трубки. Сколько трубок выкурил второй помощник за время погрузки (считаем, что скорость погрузки, так же как и скорость курения трубок, все время оставалась постоянной.)

Ответ: помощник выкурил 5 трубок.

Решение.

Пусть x – часть контейнеров, которая была погружена к полудню, а y – оставшаяся часть контейнеров. Тогда из условий получаем: $\begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{4}{9}y \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{5}, \quad y = \frac{3}{5}.$

После раскуривания одной трубки соотношение стало обратным, то есть доля погруженных контейнеров стала равняться 3/5, и значит, за это время погрузили 1/5 часть контейнеров. Таким образом, всего помощник капитана выкурил 5 трубок во время погрузки.

Задача № 3

Найти g(x), если известно, что

$$f(x+1)=3-2x \quad и \quad f(g(x))=6x-3.$$

Ответ: $g(x) = 4-3x$.

Решение.

Преобразуем первую функцию к виду $f(x+1) = 5 - 2(x+1)$. При этом стало понятно как «работает» данная линейная функция на свой аргумент. Она таким же образом будет действовать и на функцию $g(x)$. То есть $f(g(x)) = 5 - 2\,g(x) = 6x - 3$. Откуда $g(x) = 4-3x$.

Задача №4

Найти площадь фигуры, заданной неравенством

$$|x| + |y| + |x-y| \le 2$$

Ответ: площадь фигуры составляет 3 кв.ед.

Решение.

Легко видеть, что если точка (x,y) удовлетворяет исходному неравенству $|x| + |y| + |x-y| \le 2$, то и точка ($-x, -y$) будет удовлетворять этому же неравенству, так как $|-x| + |-y| + |-x + y| \le 2$ и $|x| + |y| + |-(x-y)| \le 2$, или $|x| + |y| + |x-y| \le 2$. Геометрически это будет означать симметрию фигуры относительно начала координат.

В силу этого построим фигуру в 1 и 2 четвертях координатной плоскости и выполним преобразование центральной симметрии.

Раскроем модуль для точек 1 четверти. При этом возможны два случая: $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x - y \ge 0 \\ x + y + x - y \le 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x - y \le 0 \\ x + y - x + y \le 2 \end{cases}$. В первом случае получаем $x \le 1$ и $y \le x$.

Поэтому имеем треугольник, лежащий под прямой $y = x$.

Во втором случае $y \le 1$ и $y \ge x$. Поэтому имеем треугольник, лежащий над прямой y = x. Объединяя фигуры, получим квадрат со сторонами, лежащими на координатных осях, и равными 1. Для точек второй четверти возможна только одна ситуация:

$\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 0 \\ x - y \ge 0 \\ x - y + x - y \le 2 \end{cases}$. То есть $x - y \le 1$, $y \ge x - 1$. Получаем треугольник, образованный осями координат и прямой $y = x -1$. В результате получаем фигуру:

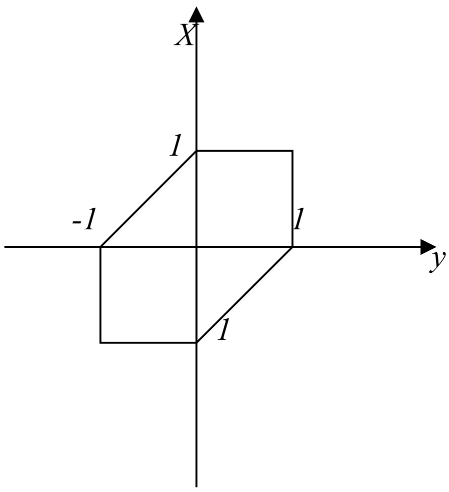
Площадь этой фигуры равна 3 (кв.ед) как площадь двух квадратов со стороной 1 и двух прямоугольных равнобедренных треугольников с катетами 1.

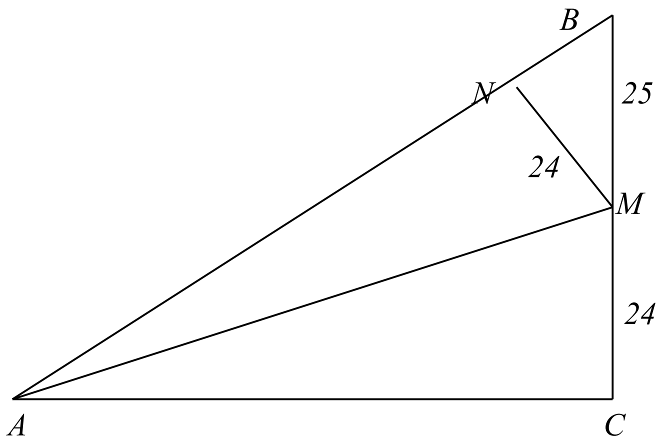
Задача №5

Биссектриса прямоугольного треугольника делит катет на отрезки длины 25 см и 24 см. Найти длину описанной около этого треугольника окружности.

Ответ: длина описанной окружности равна $c = 175\pi$.

Решение





Опустим из точки M перпендикуляр на гипотенузу. Треугольники ACM и AMN равны по гипотенузе и острому углу. Тогда $MN = 24$ см, а по теореме Пифагора $NB = 7$ см. Из подобия прямоугольных треугольников ABC и MNB получим $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BN}$; $\frac{AB}{25} = \frac{49}{7}$. Откуда гипотенуза равна 175 см. Но гипотенуза является диаметром описанной окружности, поэтому $c = 175\pi$.