Муниципальный этап Российской олимпиады школьников по математике 2020-21 учебного года

9 класс *(время решения — 4 часа)*

1. Можно ли первые 8 натуральных чисел расставить по кругу так, чтобы каждое число делилось на разность своих соседей?

   Ответ. Да.

   Решение. Например, можно расставить числа так: 1, 5, 2, 7, 3, 8, 4, 6 (числа 6 и 1 — соседние).

   Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

   Верный пример, даже без проверки — 7 баллов.

   Замечание. Нужная расстановка не единственна.

2. Про натуральные числа a и b известно, что $5a - 1$ делится на b, $a - 10$ делится на b, но $3a + 5$ не делится на b. Какие значения может принимать число b?

   Ответ. 49.

   Решение. Число $(5a - 1) - 5 \cdot (a - 10) = 49$ делится на b, поэтому либо $b = 1$, либо $b = 7$, либо $b = 49$. Если бы число $(3a + 5) - 3 \cdot (a - 10) = 35$ делилось на b, то $3a + 5$ делилось бы на b, что не так. Значит варианты $b = 1$ и $b = 7$ невозможны. Числа $a = 10$ и $b = 49$ показывают, что $b = 49$ достижимо.

   Комментарий. (a) Ответ — 1 балл.

   (b) Доказано, что b является делителем 49 — 3 балла.

   (c) Доказано, что b не равно 7 или более сильное утверждение, из которого следует, что $b \neq 7$ — 1 балл.

   Баллы по предыдущим пунктам суммируются кроме случаев:

   Доказаны пункты (b) и (c) — 6 баллов.

   Верное решение — 7 баллов.

   Замечание. Проверка существования таких чисел a и b не обязательна, так как предполагается в условии.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Известно, что в треугольнике $A_1B_1C_1$ эти прямые также являются биссектрисами. Верно ли, что треугольник ABC равносторонний?

   Ответ. Да.

   Первое решение. Рассмотрим треугольники AB_1A_1 и AC_1A_1. Так как по условию $\angle B_1AA_1 = \angle A_1AC_1$ и $\angle B_1A_1A = \angle AA_1C_1$, то эти треугольники равны по стороне и двум углам. Значит $AB_1 = AC_1$, поэтому треугольник AB_1C_1 — равнобедренный. Аналогично доказывается равенство треугольников CB_1C_1 и

CA_1C_1 и равнобедренность треугольника BA_1C_1. Так как $\triangle CB_1C_1 = \triangle CA_1C_1$, то $\angle CB_1C_1 = \angle CA_1C_1$, $180^\circ - \angle AB_1C_1 = 180^\circ - \angle BA_1C_1$, $\angle AB_1C_1 = \angle BA_1C_1$, $\angle BAC = 180^\circ - 2\angle AB_1C_1 = 180^\circ - 2\angle BA_1C_1 = \angle ABC$. Таким же образом доказывается равенство углов BAC и ACB, значит треугольник ABC равносторонний.

Второе решение. Рассмотрим треугольники AB_1A_1 и AC_1A_1. Так как по условию $\angle B_1AA_1 = \angle A_1AC_1$ и $\angle B_1A_1A = \angle AA_1C_1$, то эти треугольники равны по стороне и двум углам. Значит $AB_1 = AC_1 = x$. Аналогично доказывается, что $BC_1 = BA_1 = y$ и $CA_1 = CB_1 = z$. Так как $\frac{AB}{AC} = \frac{A_1B}{A_1C}$, то $\frac{x+y}{x+z} = \frac{y}{z}$, $zx + zy = yx + yz$, $z = y$. Аналогично доказывается, что $x = y$, откуда следует, что $x = y = z$, $x + y = y + z = z + x$, $AB = BC = CA$, и значит треугольник ABC равносторонний.

Третье решение. Рассмотрим треугольники AB_1A_1 и AC_1A_1. Так как по условию $\angle B_1AA_1 = \angle A_1AC_1$ и $\angle B_1A_1A = \angle AA_1C_1$, то эти треугольники равны по стороне и двум углам. Значит $AC_1 = AB_1 = x_1$. Аналогично доказывается, что $BC_1 = BA_1 = y_1$ и $CA_1 = CB_1 = z_1$. Впишем в треугольник ABC окружность, которая касается сторон AB, BC и CA соответственно в точках C_2, A_2 и B_2. Мы знаем, что $AC_2 = AB_2 = x_2$, $BC_2 = BA_2 = y_2$ и $CA_2 = CB_2 = z_2$. Отсюда следует, например, что $2x_1 = (x_1+y_1)+(x_1+z_1)-(y_1+z_1) = AB+AC-BC = (x_2+y_2)+(x_2+z_2)-(y_2+z_2) = 2x_2$. Аналогично доказывается, что $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$, значит точки с разными индексами на самом деле совпадают. Так как AA_1 проходит через I — центр вписанной в треугольник ABC окружности, то AA_1 содержит радиус, проведённый в A_1, значит $AA_1 \perp BC$, поэтому AA_1 — биссектриса и высота, то есть $AB = AC$. Аналогично доказывается, что $AB = BC$, и значит треугольник ABC — равносторонний.

Четвёртое решение. Рассмотрим треугольники AB_1A_1 и AC_1A_1. Так как по условию $\angle B_1AA_1 = \angle A_1AC_1$ и $\angle B_1A_1A = \angle AA_1C_1$, то эти треугольники равны по стороне и двум углам. Значит $A_1B_1 = B_1C_1$, и аналогично доказывается, что $A_1B_1 = A_1C_1$. Поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ будет равносторонним. Построим треугольник $A'B'C'$, для которого $A_1B_1C_1$ является серединным. Понятно, что A' лежит на AA_1, B' лежит на BB_1, C' лежит на CC_1 (действительно, $A'A_1$ будет биссектрисой угла $C_1A_1B_1$, как и AA_1). Допустим, что $A' \neq A$. Если A' лежит внутри ABC, тогда, пройдя по отрезку $A'B'$, мы выйдем из ABC, значит B' лежит вне ABC. Тогда C' лежит внутри ABC, и A' — вне ABC, чего не может быть. Аналогично, приходим к противоречию, предположив, что A' лежит вне ABC. Значит $A = A'$, и отсюда следует, что $B = B'$, $C = C'$. Так как $A'B'C'$ — равносторонний, то и ABC — равносторонний.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

4. В поезде несколько одинаковых вагонов. Назовём вагон тесным, если в нём заполнено не менее половины мест. Докажите, что процент людей, едущих в тесных вагонах, не меньше, чем процент тесных вагонов.

Первое решение. Пусть всего вагонов n, первые k из которых — тесные, и число людей в i-м вагоне равно a_i. Тогда $100\frac{a_1+\ldots+a_k}{a_1+\ldots+a_n}$ — процент людей, едущих в тесных вагонах, и $100\frac{k}{n}$ — процент тесных вагонов. Осталось доказать, что $\frac{a_1+\ldots+a_k}{a_1+\ldots+a_n} \geqslant \frac{k}{n}$. Последнее неравенство можно переписать в виде $n(a_1+\ldots+a_k) \geqslant k(a_1+\ldots+a_n)$, $(n-k)(a_1+\ldots+a_k) \geqslant k(a_{k+1}+\ldots+a_n)$. В последнем неравенстве и слева и справа стоит сумма $(n-k)k$ чисел, при этом каждое число слева не меньше числа справа. Поэтому это неравенство верно, а значит верно и исходное неравенство.

Второе решение. Пусть a — число людей в тесных вагонах, b — число остальных людей, k — количество тесных вагонов, m — число остальных вагонов. Пусть c — половина от числа мест в вагоне. Тогда $b \leqslant cm$, $a \geqslant ck$, поэтому $\frac{b}{a} \leqslant \frac{cm}{ck} = \frac{m}{k}$, значит $\frac{b}{a}+1 \leqslant \frac{m}{k}+1$, $\frac{a+b}{a} \leqslant \frac{k+m}{k}$, $\frac{a}{a+b} \geqslant \frac{k}{k+m}$, $100\frac{a}{a+b} \geqslant 100\frac{k}{k+m}$, что доказывает задачу.

Третье решение. Будем называть вагон просторным, если он не является тесным. Возьмём тесный вагон. Если оттуда можно убрать человека и при этом вагон останется тесным — сделаем это. Тогда процент тесных вагонов не изменится, а процент людей, едущих в тесных вагонах, не увеличится. Действительно, если людей всего n, а людей, едущих в тесных вагонах k, то $\frac{k}{n} \geqslant \frac{k-1}{n-1}$ так как $k(n-1) \geqslant n(k-1)$, $n \geqslant k$. Будем продолжать делать эту операцию до тех пока, пока можем. Если в просторный вагон можно посадить человека так, чтобы он оставался просторным — сделаем это. Процент людей, едущих в тесных вагонах, не увеличится, и процент тесных вагонов не изменится. Будем продолжать делать эту операцию. В итоге, если тесных вагонов k, m — число просторных вагонов, и c — наименьшее возможное количество людей в тесном вагоне, то процент людей, едущих в тесных вагонах, стал равен $\frac{kc}{kc+m(c-1)} \geqslant \frac{k}{k+m}$, так как $c(k+m) \geqslant kc+m(c-1)$. Итак, в самом конце процент людей, едущих в тесных вагонах, не меньше, чем процент тесных вагонов, и так как наши операции не увеличивают процента людей, едущих в тесных вагонах, то и изначально процент людей, едущих в тесных вагонах, не меньше, чем процент тесных вагонов.

Комментарий. Доказано, что если при удалении человека из тесного вагона процент тесных вагонов не изменится, то процент людей, едущих в тесных вагонах, не увеличится — 3 балла.

5. Есть бесконечная клетчатая плоскость, ни одна точка которой не покрашена в синий цвет. За один рубль можно выбрать клетку и покрасить все её стороны в синий цвет, даже если какая-то сторона у неё уже была покрашена. Какую наименьшую сумму нужно заплатить, чтобы получить клетчатый квадрат 1001×1001, все линии сетки внутри и на границе которого будут покрашены в синий цвет? Не требуется, чтобы в итоге были покрашены только линии сетки квадрата.

   Ответ. 503000 рублей.

   Решение. Будем всюду в решении отрезком называть отрезок, соединяющий узлы сетки на расстоянии, равном стороне клетки. Обозначим за s наш квадрат 1001×1001. Любая клетка либо имеет два общих отрезка с периметром s (при этом она попадает в угол s), либо имеет с ним не более одного общего отрезка. Если взять менее 4000 клеток, то они покроют менее $2 \cdot 4 + 4000 - 4 = 4004$ отрезков периметра, и значит не покроют периметр, поэтому для покрытия периметра нужно покрасить не менее 4000 клеток.

   Рассмотрим квадрат 999×999, полученный из s выкидыванием кромки ширины 1. Разобьём его на $\frac{999 \cdot 999 - 1}{2}$ прямоугольников 1×2 и одну клетку. В каждом прямоугольнике должна быть покрашена клетка, иначе меньшая средняя линия этого прямоугольника не будет покрашена (она принадлежит только двум клеткам этого прямоугольника). Поэтому в таких прямоугольниках должно быть покрашено не менее $\frac{999 \cdot 999 - 1}{2} = 500 \cdot 998 = 499000$ клеток.

   Заметим, что ни одна из клеток внутри квадрата 999×999 не может иметь общих отрезков с периметром s. Поэтому число необходимых клеток не менее $499000 + 4000 = 503000$. Построим пример, для которого потребуется покрасить ровно 503000 клеток. Покрасим каждую клетку из кромки ширины 1 нашего квадрата, на это уйдёт 4000 рублей. Мысленно раскрасим встреченный ранее квадрат 999×999 шахматной раскраской в зелёный и красный цвета, пусть при этом зелёных клеток меньше, чем красных. Если заплатить за каждую зелёную клетку, то мы получим правильно раскрашенный квадрат s и всего потратим $\frac{999 \cdot 999 - 1}{2} + 4000 = 503000$ рублей.

   Комментарий. Ответ — 1 балл.

   Пример раскраски — 2 балла.

   Доказано, что необходимо потратить не менее 4000 рублей на периметр s — 1 балл.

   Доказано, что необходимо потратить не менее 499000 рублей на покраску внутреннего квадрата 999×999 — 3 балла.

   Баллы по предыдущим пунктам суммируются.

   Если решение в целом верно, но нет объяснения, почему множества клеток, участвующие в двух оценках не пересекаются — 6 баллов.