9 класс

1. На доске записаны три квадратных уравнения:

$$2020x^2 + bx + 2021 = 0,$$
$$2019x^2 + bx + 2020 = 0,$$
$$x^2 + bx + 2019 = 0.$$

Найдите произведение корней всех уравнений, записанных на доске, если известно, что каждое из них имеет два действительных корня.

Решение. По теореме, обратной теореме Виета, произведение корней первого уравнения – $\frac{2021}{2020}$, произведение корней второго уравнения – $\frac{2020}{2019}$, третьего – 2019. Итак, произведение корней всех уравнений равно $\dfrac{2021}{2020} \cdot \dfrac{2020}{2019} \cdot 2019 = 2021$. **Ответ: 2021.**

Комментарий. Утверждение теоремы, обратной теореме Виета, участник олимпиады ошибочно называет теоремой Виета – баллы не снимать.

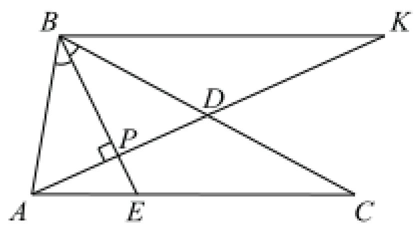
2. Маша записала на каждой из трёх карточек по одной цифре, отличной от нуля (все цифры различны). Даша составила из них все возможные трёхзначные числа. Может ли сумма этих чисел равняться 2021?

Решение. Пусть на карточках были записаны цифры a, b и c. Поскольку они попарно различные, то Даша составила шесть чисел. Так как каждая из цифр встретится в разрядах сотен, десятков и единиц по два раза, то их сумма равна $200(a + b + c) + 20(a + b + c) + 2(a + b + c) = 222(a + b + c)$. Тогда равенство $222(a + b + c) = 2021$ выполняться не может, так как 222 делится на 3, а 2021 – не делится. **Ответ: не может.**

3. Можно ли таблицу размером 10×10 заполнить числами –1, 0, 1 так, чтобы суммы во всех строках, во всех столбцах и на главных диагоналях были различными? Главными диагоналями таблицы называются диагонали, проведённые из левого верхнего угла таблицы в правый нижний и из правого верхнего угла таблицы в левый нижний.

Решение. См. решение задачи 11.2. **Ответ: нельзя.**

4. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 60. Найдите стороны треугольника ABC.



Решение. Пусть P – точка пересечения отрезков BE и AD. Треугольник ABD – равнобедренный, так как его биссектриса BP является высотой. Поэтому $AP = PD = 30$; $BC = 2BD = 2AB$.

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{CE}{AE} = 2 \Rightarrow AC = 3AE$.

Удвоим медиану AD треугольника ABC ($AD = DK$). Заметим,что $ABKC$ – параллелограмм и $BK = AC = 3AE$.

Из подобия треугольников APE и KPB следует, что $\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}$. Поэтому $PE = 15$ и $PB = 45$. Следовательно, $AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = 15\sqrt{13}$, тогда $BC = 2AB = 30\sqrt{13}$.

Далее, $AE = \sqrt{AP^2 + EP^2} = 15\sqrt{5}$, откуда $AC = 3AE = 45\sqrt{5}$. **Ответ:** $\mathbf{15\sqrt{13}}$**,** $\mathbf{30\sqrt{13}}$**,** $\mathbf{45\sqrt{5}}$**.**

5. Пусть k – натуральное число. Известно, что среди 29 последовательных чисел $30k+1$, $30k+2$, ..., $30k+29$ имеется ровно 7 простых. Докажите, что первое и последнее из них – простые.

   Решение. Вычеркнем из этого ряда числа, кратные 2, 3 или 5. Останется 8 чисел: $30k+1$, $30k+7$, $30k+11$, $30k+13$, $30k+17$, $30k+19$, $30k+23$, $30k+29$. Допустим, что среди них есть составное число. Докажем, что это число кратно 7. Первые семь этих чисел дают разные остатки при делении на 7, т. к. числа 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 дают разные остатки при делении на 7. Значит, одно из этих чисел кратно 7. Заметим, что число $30k+1$ не кратно 7, иначе $30k+29$ также будет кратно 7, а составное число должно быть ровно одно. Значит, числа $30k+1$ и $30k+29$ - простые.