МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 2020-2021 уч. год
9 класс
(4 часа)

1. Среди жителей города С. 30% не учит математику, а среди тех, кто учит математику, 70 % её не понимают. Среди жителей, понимающих математику, всего 20 % её применяет на практике, а среди жителей, применяющих математику, её любит только каждый седьмой. Какой процент жителей города С любит математику?

Ответ: 0,6%.

Решение. Пусть всего в городе С. x жителей. Тогда учит математику $0{,}7x$ жителей. Среди них понимающих математику только 30%, то есть $0{,}3\times 0{,}7x=0{,}21x$. А среди людей, понимающих математику, те, кто её применяет, составляют 20 %, то есть $0{,}2\times 0{,}21x=0{,}042x$. Среди жителей, применяющих математику, любит её $0{,}042x:7=0{,}006x$. Значит, среди всех жителей города С тех, кто любит математику, всего 0,6 % от общего числа горожан.

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Только верный ответ – 1 балл.
Верно составлены уравнения или проведены рассуждения, но допущена вычислительная ошибка – 5 баллов.
Если верное решение – 7 баллов.

2. Может ли десятичная запись суммы попарных произведений трёх последовательных чисел оканчиваться на 2019?

Ответ: Не может.

Решение. *Первый способ.* Пусть среднее из трёх последовательных чисел равно n. Тогда сумма попарных произведений $(n–1)(n+1)+n(n–1)+n(n+1)=3n^2–1= =\ldots 2019$. Значит, $3n^2=\ldots 2020$. Из последнего равенства следует, что $3n^2$ кратно 5. Ввиду взаимной простоты 3 и 5 имеем, что n кратно 5, откуда n^2 кратно 25. Но числа, кратные 25 оканчивается на 00, 25, 50 или 75, что в нашем случае не так. Значит, это невозможно.

Второй способ. Пусть меньшее из трёх последовательных чисел равно n. Тогда сумма попарных произведений $n(n+1)+(n+1)(n+2)+n(n+2)=3n^2+6n+2= =3(n^2+2n+1)-1=\ldots 2019$. Далее так же, как в первом способе.

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*
Сведено к уравнению $3n^2=\ldots 2020$ *– 3 балла.*
Если нет ссылки на взаимную простоту чисел 3 и 5 – 6 баллов.
Если верное решение – 7 баллов.

3. Докажите, что для любых положительных p, q, r выполняется неравенство
$$\left(\frac{1}{pq}+\frac{1}{qr}+\frac{1}{rp}\right)^2 \geq \frac{3}{pqr}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right).$$

Решение. Сделаем замену: $\frac{1}{pq}=x, \frac{1}{qr}=y, \frac{1}{rp}=z$. Тогда неравенство примет вид
$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx).$$
Оно преобразуется в неравенство $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$.
Затем получаем неравенство $2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2zx$.
В результате получаем следующее неравенство

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$$

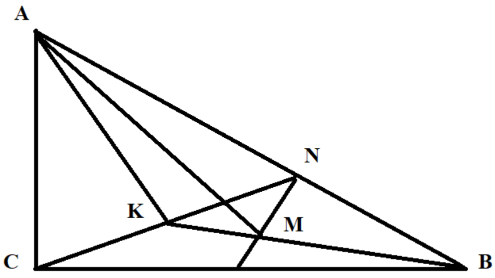
Так как квадраты всегда неотрицательны, то левая часть больше или равна правой.

Замечание. *Можно доказывать, используя неравенство Коши.*

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*

Если верное решение – 7 баллов.

4. В прямоугольном треугольнике *ABC* с углом $\angle A$=60° на гипотенузе *AB* отмечена точка *N*, а на отрезке *CN* отмечена его середина – точка *K*. Оказалось, что *AK*=*AC*. Медианы треугольника *BCN* пересекаются в точке *M*. Найдите угол между прямыми *AM* и *CN*.



Решение. По свойству прямоугольного треугольника с углом в 30° получаем, что AB:AC=2:1. Значит, AB:AK=2:1. По свойству медиан треугольника BM:MK=2:1. Тогда по теореме, обратной теореме о биссектрисе треугольника, получаем, что AM – биссектриса угла ∠BAK. Пусть ∠BAM=α. Тогда ∠KAM=α, ∠KAC=60° – 2α. Так как треугольник KAC равнобедренный, то ∠KCA=60° + α. По теореме о сумме углов треугольника получаем, что угол между прямыми *AM* и *CN* равен 180°– (60°– α+60°+α)=60°.

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*

Если доказано, что треугольник OXY равнобедренный – 3 балла.

Если верное решение – 7 баллов.

5. В чемпионате класса по крестикам-ноликам участвуют 21 ученик. В каждом матче встречаются некоторые два ученика, ничьих нет. Ученик, дважды проигравший, прекращает участие в чемпионате. Побеждает один ученик, оставшийся после выбывания остальных. Какое наибольшее количество учеников могло одержать три или больше побед?

Ответ: 13 учеников.

Решение. *Оценка.* Поскольку каждый ученик, кроме чемпиона, проиграл не более двух раз, а чемпион-не более одного раза, то произошло не более 20×2 + 1 = 41 матча. Соответственно, в этих матчах было одержано не более 41 победы, то есть по три победы могли получить максимум 13 учеников.

Пример. Покажем, что такое количество действительно возможно. Занумеруем всех учеников. Пускай в первый день чемпионата ученики с номерами 1, 2, 3 проигрывают ученикам с номерами 4 и 5, во второй день ученики с номерами 4, 5, 6 проигрывают ученикам с номерами 7 и 8, и так далее. Тогда в каждый из первых 6 дней некоторые три ученика дважды проигрывают и выбывают из турнира, а некоторые два ученика, которые раньше не играли, трижды выигрывают. На седьмой день останутся ученики с номерами 19, 20 и 21 и ученики с номерами 19, 20 дважды проигрывают ученику с номером 21, который одержит четыре победы.

Критерии. *Если неверное решение – 0 баллов.*

Если построен только пример – 3 балла.

Если доказана только оценка – 4 балла.

Если верное решение – 7 баллов.