Задания муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2020-2021 учебный год
9 класс

Продолжительность олимпиады: 240 минут. Максимальное возможное количество баллов: 35

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
4-5	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача 1 (7 баллов).
Груз весом 13,5 т упакован в ящики так, что вес каждого ящика не превосходит 350 кг. Докажите, что этот груз можно перевезти на 11 полуторатонках. (Весом пустого ящика можно пренебречь.)

Решение
Выделим 8 машин и будем последовательно их грузить, причём каждый раз тот ящик, который уже нельзя погрузить, будем ставить рядом с машиной. Погруженные ящики вместе с ящиками, стоящими рядом с машинами, весят более $8 \cdot 1{,}5=12$ т, поэтому оставшиеся ящики весят менее 1,5 т; их можно увезти на одной полуторатонке.
Поскольку $4 \cdot 350=1400<1500$, на одной машине можно увезти любые 4 ящика. Значит, 8 ящиков, стоящих рядом с машинами, можно увезти на двух оставшихся полуторатонках.

Задача 2 (7 баллов).
Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечётное число фигур?
Ответ: Не может.
Решение
Допустим, в какой-то момент возникла описанная ситуация.
Рассмотрим количество фигур, стоящих на чёрных клетках. С одной стороны, это число равно сумме количеств фигур на диагоналях, параллельных диагонали a1 - h8, то есть нечётному числу. С другой стороны, оно равно сумме количеств фигур в диагоналях, параллельных диагонали a8 - h1, то есть чётному числу. Следовательно, описанная в условии ситуация невозможна.

Задача 3 (7 баллов).
Определить отношение двух чисел, если отношение их среднего арифметического к среднему геометрическому равно 25 : 24.

Ответ: 9:16 или 16:9

Решение.
Пусть x и y искомые числа. По условию

$$\frac{x+y}{2} \div \sqrt{xy} = 25:24, \text{или}, \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{25}{12}$$

Обозначим $q = \sqrt{\frac{x}{y}}$ Тогда $q + \frac{1}{q} = \frac{25}{12}$,

$$q^2 - \frac{25}{12}q + 1 = 0$$

Решая это квадратное уравнение, находим $q_1 = 4/3$ и $q_2 = 3/4$.
Таким образом, $x : y = 16 : 9$ или $9 : 16$.

Задача 4 (7 баллов).
Дан треугольник ABC. Центры вневписанных окружностей O_1, O_2 и O_3 соединены прямыми. Доказать, что треугольник $O_1O_2O_3$ — остроугольный.

Решение.
Центр O_1 вневписанной окружности, касающейся стороны BC, является точкой пересечения биссектрис внешних углов при вершинах B и C.

Поэтому $\angle O_1CB = (180-\angle C)/2$, $\angle O_1BC = (180-\angle B)/2$.

Следовательно, $\angle O_3O_1O_2 = \angle BO_1C = (180^\circ - \angle A)/2 < 90^\circ$.

Аналогично доказывается, что $\angle O_1O_2O_3 < 90^\circ$ и $\angle O_1O_3O_2 < 90^\circ$.

Задача 5 (7 баллов)
Клетки таблицы 6х6 раскрашены в чёрный и белый цвета так, что получилось 30 пар соседних клеток разного цвета и 16 пар соседних клеток чёрного цвета. (Клетки считаются соседними, если у них есть общая сторона.) Сколько пар соседних клеток белого цвета?
Ответ: 14
Решение.
Угловые клетки имеют по 2 соседа, таких клеток в таблице 4, значит, всего пар $2 \cdot 4 = 8$. Крайние клетки (не угловые) имеют по 3 пары, таких клеток 16, значит, всего пар $16 \cdot 3 = 48$. Все остальные клетки имеют по 4 пары, таких клеток $36 - 4 - 16 = 16$, то есть 64 пары. Всего имеем пар $8 + 48 + 64 = 120$. В приведенных расчетах все пары взяты дважды (так как учитывались все клетки). Таким образом, уникальных пар $120 : 2 = 60$. Поэтому пар белого цвета $60 - 30 - 16 = 14$.