Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

2020/21 учебный год

9 класс

Ответы и решения задач

1. УСЛОВИЕ

Докажите, что для любой возрастающей линейной функции f(x) найдется такая возрастающая линейная функций g(x), что $f(x) = g(g(x))$.

Доказательство. Пусть $f(x) = kx + \ell$. Возрастание f(x) означает, что $k > 0$. Пусть $g(x) = ax + b$. Найдем подходящие a и b. Имеем: $g(g(x)) = ag(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$. Достаточно (и необходимо) взять $a^2 = k$ и $ab + b = \ell$. Находим $a = \sqrt{k}$, $b = \dfrac{\ell}{\sqrt{k} + 1}$. Требуемое получено.

2. УСЛОВИЕ

Гонцу надо пробежать 24 мили. Две трети этого расстояния он бежал со средней скоростью 8 миль в час. Сможет ли он, увеличив скорость, пробежать остаток пути так, чтобы его средняя скорость на всём пути равнялась 12 миль в час?

Решение. Чтобы средняя скорость гонца на всем пути равнялась 12 милям в час, он должен пробежать 24 мили за 2 часа. Но эти 2 часа он уже потратил на первые 16 миль.

Ответ: не сможет.

3. УСЛОВИЕ

Даны два треугольника. Сумма двух углов первого равна некоторому углу второго. Сумма другой пары углов первого также равна некоторому углу второго. Докажите, что первый треугольник – равнобедренный.

Доказательство. Пусть α, β, γ – углы первого треугольника. Пусть $\alpha + \beta$ – это угол второго треугольника. Другая пара углов первого треугольника, скажем, α и γ даёт сумму $\alpha + \gamma$. Предположим, что $\alpha + \gamma$ – это угол второго треугольника, отличный от $\alpha + \beta$. Сумма двух углов в треугольнике меньше π: $\alpha + \beta + \alpha + \gamma < \pi$. Но из первого треугольника имеем $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Полученное противоречие свидетельствует о том, что $\alpha + \beta$ и $\alpha + \gamma$ – это один угол: $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, т.е. $\beta = \gamma$, ч.т.д.

4. УСЛОВИЕ

Квадрат натурального числа *a* при делении на натуральное число *n* даёт в остатке 8. Куб числа *a* при делении на *n* даёт в остатке 25. Найдите *n*.

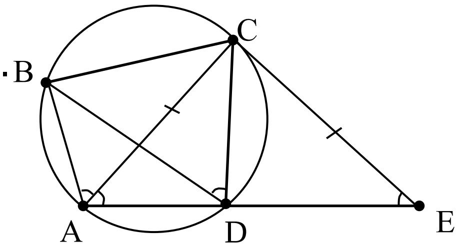
Решение. Заметим, что число $x = a^6 - 8^3 = (a^2)^3 - 8^3 = (a^2 - 8)(a^4 + 8a^2 + 64)$ делится на n. Также заметим, что число $y = a^6 - 25^2 = (a^3)^2 - 25^2 = \ = (a^3 - 25)(a^3 + 25)$ делится на n. Тогда на n делится разность $x - y = (a^6 - 8^3) - (a^6 - 25^2) = 625 - 512 = 113$. Число 113 – простое, оно имеет только два делителя: 1 и 113. Так как по условию $n > 25$, то $n = 113$.

Ответ: $n = 113$.

5. УСЛОВИЕ

На продолжении стороны AD вписанного четырехугольника ABCD за точку D отмечена точка E, такая, что $AC = CE$ и $\angle BDC = \angle DEC$. Докажите, что $AB = DE$.

Доказательство. См. рис.



Пусть $\angle DEC = \varphi$. Тогда $\angle DAC = \varphi$, т. к. по условию треугольник ACE – равнобедренный. Угол BAC также равен φ (вписанные углы BAC и BDC опираются на одну дугу). Кроме того, $\angle ABC = \angle CDE$, так как оба они в сумме с углом ADC дают 180°. Значит, треугольники ABC и EDC равны (по стороне и двум углам). Следовательно, $AB = ED$. Ч.т.д.

6. УСЛОВИЕ

На столе лежит 2001 монета. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За ход первый может взять со стола любое нечётное число монет от 1 до 99, второй – любое чётное число монет от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? Ответ обоснуйте.

Решение. Опишем стратегию первого игрока. Первым ходом он должен взять со стола 81 монету. Каждым следующим ходом, если второй берет *x* монет, первый должен взять 101 – *x* монет. Он всегда может это сделать, потому что если *x* – чётное число от 2 до 100, то (101 – *x*) – нечётное число от 1 до 99. Так как 2001 = 101 · 19 + 81 + 1, через 19 таких «ответов» после хода первого на столе останется 1 монета и второй не сможет сделать ход, т. е. проиграет.

Ответ. Выигрывает первый.