

10 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

10.1. Найдите сумму $\sin x + \sin y + \sin z$, если известно, что $\sin x = \operatorname{tg} y$, $\sin y = \operatorname{tg} z$, $\sin z = \operatorname{tg} x$.

10.2. Дано выражение $A = xy + yz + zx$, где x, y, z – целые числа. Если число x увеличить на 1, а числа y и z уменьшить на 2, то значение выражения A не изменится. Докажите, что число $(-1) \cdot A$ – квадрат целого числа.

10.3. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^7 > y^6$ и $y^7 > x^6$. Докажите, что $x + y > 2$.

10.4. В замке 16 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 4×4 . В эти комнаты по одному человеку поселилось 16 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 16 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 16 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

10.5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH . Точка P симметрична точке A относительно прямой BC . Прямая CH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ACP , в точке K . Прямая KP пересекает отрезок AB в точке M . Докажите, что $AC = CM$.