

**Муниципальный этап  
всероссийской олимпиады школьников по математике  
2020/21 учебный год  
10 класс**

*Дорогой друг! Желаем успеха!*

**Инструкция для учащихся**

Олимпиада по математике состоит из 6 заданий. На выполнение олимпиады отводится 4 астрономических часа. Каждое задание оценивается в 7 баллов, решение задания необходимо расписать подробно. Задания можно выполнять по своему усмотрению. Если задание не удаётся выполнить сразу, перейдите к следующему. Если останется время, вернитесь к пропущенным заданиям.

**Калькулятором, справочной литературой пользоваться нельзя!**

**Задания (максимальный балл за всю работу – 42)**

1. Пусть  $f(x, y) = kx + \frac{1}{y}$ . Докажите, что если  $f(a, b) = f(b, a)$  при  $a \neq b$ , то  $f(ab, 1) = 0$ .
2. Решите в натуральных числах уравнение  
$$\text{НОК}(a; b) + \text{НОД}(a; b) = ab.$$
(НОД – наибольший общий делитель, НОК – наименьшее общее кратное).
3. Все целые числа от 1 до  $2n$  выписали в строку в случайном порядке. Затем к каждому числу прибавили номер того места, на котором оно стоит. Докажите, что среди полученных сумм найдутся хотя бы две, дающие при делении на  $2n$  одинаковый остаток.
4. В один из дней года оказалось, что каждый житель города сделал не более одного звонка по телефону. Докажите, что население города можно разбить не более чем на три группы так, чтобы жители, входящие в одну группу, не разговаривали в этот день между собой по телефону.
5. В выпуклом четырехугольнике ABCD  $\angle CBD = \angle CAB$ ,  $\angle ACD = \angle ADB$ . Докажите, что из отрезков BC, AD, AC можно сложить прямоугольный треугольник.
6. На шахматной доске  $8 \times 8$  расставили 64 шашки с номерами от 1 до 64. 64 ученика по очереди подходят к ней и переворачивают только те шашки, номера которых делятся нацело на порядковый номер очередного ученика. «Дамка» – это шашка, которая перевернута нечетное количество

раз. Сколько «Дамок» будет на доске, после того как последний ученик отойдет от неё?