

11 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

11.1. Дано выражение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$, где x и y – натуральные

числа. Если число x увеличить на 4, а число y уменьшить на 4, то значение этого выражения не изменится. Докажите, что $xy + 4$ – квадрат целого числа.

11.2. На доске написано 4 числа. Вася умножил первое из этих чисел на $\sin \alpha$, второе – на $\cos \alpha$, третье – на $\operatorname{tg} \alpha$, четвертое – на $\operatorname{ctg} \alpha$ (для некоторого угла α) и получил набор из тех же 4 чисел (возможно записанных в другом порядке). Какое наибольшее количество различных чисел могло быть написано на доске?

11.3. Числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^5 > y^4$ и $y^5 > x^4$. Докажите, что $x^3 > y^2$.

11.4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Перпендикуляр к стороне BC , проведенный через ее середину – точку M , пересекает сторону AB в точке K . Окружность с диаметром KC пересекает отрезок CD в точке P ($P \neq C$). Докажите, что прямые MP и AD перпендикулярны.

11.5. В замке 25 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат 5×5 . В эти комнаты по одному человеку поселилось 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 25 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди этих 25 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.