

# Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ по математике

## для 4 класса

2020/21 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Каждое точное совпадение ответа — 1 балл

### Задание №1

---

**1.1** Две пары влюбленных хотят сесть на скамейку. Сколькими способами они могут сесть так, чтобы каждый парень сидел рядом со своей девушкой, если у скамейки отличаются левая и правая сторона?

**Ответ:** 8

*Решение.* Пронумеруем места от 1 до 4. Если кто-то из пары сел на место под номером 1, то второй должен сесть на место 2. Таким образом, каждая пара сидит либо слева (1 и 2 место), либо справа (3 и 4 место). При этом каждая пара может сесть двумя способами (парень слева или справа), и сами пары могут поменяться местами. Итого  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  способов.

**Задача 4.1.2.** Спортивная команда состоит из двух мальчиков и двух девочек. В эстафете этапы, которые бегут девочки, должны чередоваться с этапами, которые бегут мальчики. Сколькими способами можно распределить этапы?

**Ответ:** 8

*Решение.* Мальчики могут бежать 1 и 3 этапы, а могут — 2 и 4 этапы. Если они бегут 1 и 3 этапы, то распределить их можно двумя способами, и двумя способами — девочек, итого 4 способа. Во втором случае есть еще 4 способа, итого 8 способов.

**Задача 4.1.3** Две мамы со своими детьми хотят сесть на скамейку, на которой 4 места. Сколькими способами они могут сесть так, чтобы каждая мама сидела рядом со своим ребенком? Каждая мама гуляет с одним ребенком.

**Ответ:** 8

*Решение.* Пронумеруем места от 1 до 4. Если кто-то из семьи сел на место под номером 1, то второй должен сесть на место 2. Таким образом, каждая семья сидит либо слева (1 и 2 место), либо справа (3 и 4 место). При этом каждая семья может сесть двумя способами (ребенок слева или справа), и сами семьи могут поменяться местами. Итого  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  способов.

## Задание №2

---

**2.1** В закрытом мешке лежат яблоки. Трое друзей попробовали поднять мешок и угадать, сколько там фруктов. Первый сказал, что, по его мнению, там 20 яблок, второй решил, что 22, а третий — 25. Когда друзья открыли мешок, оказалось, что кто-то из них ошибся на 1, другой — на 3 и еще один — на 6. Сколько яблок было в мешке? Найдите все возможные ответы.

**Ответ:** 19

*Решение.* Заметим, что первый и второй друг дают четные прогнозы, а значит, они делают ошибку одной четности, а третий — другой четности. Значит, третий ошибся на 6 яблок, и яблок в мешке 19 или 31. Проверив оба варианта, получаем ответ.

**2.2** В закрытом мешке лежат яблоки. Трое друзей попробовали поднять мешок и угадать, сколько там фруктов. Первый сказал, что, по его мнению, там 19 яблок, второй решил, что 22, а третий — 23. Когда друзья открыли мешок, оказалось, что кто-то из них ошибся на 1, другой — на 2 и еще один — на 3. Сколько яблок было в мешке? Найдите все возможные ответы.

**Ответ:** 20

*Решение.* Заметим, что первый и третий друг дают нечетные прогнозы, а значит, они делают ошибку одной четности, а второй — другой четности. Значит, второй ошибся на 2 яблока, и яблок в мешке 20 или 24. Проверив оба варианта, получаем ответ.

**2.3** В закрытом мешке лежат яблоки. Трое друзей попробовали поднять мешок и угадать, сколько там фруктов. Первый сказал, что, по его мнению, там 16 яблок, второй решил, что 19, а третий — 25. Когда друзья открыли мешок, оказалось, что кто-то из них ошибся на 2, другой — на 4 и еще один — на 5. Сколько яблок было в мешке? Найдите все возможные ответы.

**Ответ:** 21

*Решение.* Заметим, что второй и третий друг дают нечетные прогнозы, а значит, они делают ошибку одной четности, а первый — другой четности. Значит, первый ошибся на 5 яблок, и яблок в мешке 11 или 21. Проверив оба варианта, получаем ответ.

**2.4** В закрытом мешке лежат яблоки. Трое друзей попробовали поднять мешок и угадать, сколько там фруктов. Первый сказал, что, по его мнению, там 18 яблок, второй решил, что 21, а третий — 22. Когда друзья открыли мешок, оказалось, что кто-то из них ошибся на 2, другой — на 3 и еще один — на 6. Сколько яблок было в мешке? Найдите все возможные ответы.

**Ответ:** 24 яблока

*Решение.* Заметим, что первый и третий дают четные прогнозы, а значит, они делают ошибку одной четности, а третий — другой четности. Значит, второй ошибся на 3 яблока, и яблок в мешке 18 или 24. Проверив оба варианта, получаем ответ.

### Задание №3

---

**3.1** Скажем, что число  $A$  скрывает в себе число  $B$ , если из  $A$  можно вычеркнуть несколько цифр так, чтобы получить  $B$  (например, число 123 скрывает в себе числа 1,2,3,12,13 и 23). Найдите наименьшее натуральное число, которое скрывает в себе все числа от 2000 до 2021.

*Натуральные числа — это числа, используемые для счёта предметов.*

**Ответ:** 20012013456789

*Решение.* В числе обязательно должно быть три нуля (для числа 2000), две единицы (для числа 2011) и две двойки (для числа 2020). Остальные цифры встречаются минимум по разу, значит, в результате должно быть минимум 13 цифр. Перед третьим нулем обязательно должны идти обе двойки (число 2020) и хотя бы одна из единиц (2010). Далее можно располагать цифры по возрастанию.

**3.2.** Скажем, что число  $A$  скрывает в себе число  $B$ , если из  $A$  можно вычеркнуть несколько цифр так, чтобы получить  $B$  (например, число 123 скрывает в себе числа 1,2,3,12,13 и 23). Найдите наименьшее натуральное число, которое скрывает в себе числа 121,221,321,...,1921,2021,2121.

*Натуральные числа — это числа, используемые для счёта предметов.*

**Ответ:** 1201345678921

*Решение:* В числе обязательно должен быть один ноль, три единицы (для числа 1121), две двойки (для числа 1221), остальных цифр минимум по разу, значит, минимум 13 знаков. После двух единиц и остальных цифр подряд стоят одна двойка и одна единица, то есть они будут в конце. Минимальное число, с которого может начинаться число, это единица. Слева от второй двойки одна единица, а справа две (числа 2121 и 1221). Ноль стоит правее двойки и единицы (в числах 2021 и 1021), значит, второе число равняется 2, а третье 0. Затем можно поставить единицу и оставшиеся цифры в порядке возрастания.

## Задание №4

---

**4.1** На День Рождения Ослика Иа-Иа Винни-Пух, Сова и Пятачок решили подарить шарик, причем Винни-Пух приготовил шариков в два раза больше, чем Пятачок, а Сова — в три раза больше, чем Пятачок. Когда Пятачок нес свои шарик, он очень спешил, споткнулся, и часть шариков лопнула. На свой праздник Иа-Иа получил в сумме 31 шарик. Сколько же шариков в итоге подарил Пятачок?

**Ответ:** 1

*Решение.* Если бы Пятачок не лопнул свои шарик, то Иа-Иа получил бы ровно в 6 раз больше шариков, чем приготовил Пятачок. Следующее за 31 число, кратное 6 — это 36,  $36 : 6 = 6$ , то есть Пятачок приготовил не менее 6 шариков.

Если бы у Пятачка лопнули все шарик, то Иа-Иа получил бы ровно в 5 раз больше, чем приготовил Пятачок. Если бы изначально у Пятачка было 7 или более шариков, то даже сейчас Иа-Иа получил бы минимум 35 шариков, а это не так. Значит, Пятачок приготовил ровно 6 шариков. Если бы всё было хорошо, Иа-Иа получил бы 36 шариков, но так как 5 лопнули, значит, Пятачок подарил 1 шарик.

**4.2** На День Рождения Ослика Иа-Иа Винни-Пух, Сова и Пятачок решили подарить шарик, причем Винни-Пух приготовил шариков в три раза больше, чем Пятачок, а Сова — в четыре раза больше, чем Пятачок. Когда Пятачок нес свои шарик, он очень спешил, споткнулся, и часть шариков лопнула. На свой праздник Иа-Иа получил в сумме 60 шариков. Сколько же шариков в итоге подарил Пятачок?

**Ответ:** 4

*Решение.* Если бы Пятачок не лопнул свои шарик, то Иа-Иа получил бы ровно в 8 раз больше шариков, чем приготовил Пятачок. Следующее за 60 число, кратное 8 — это 64,  $64 : 8 = 8$ , то есть Пятачок приготовил не менее 8 шариков.

Если бы у Пятачка лопнули все шарик, то Иа-Иа получил бы ровно в 7 раз больше, чем приготовил Пятачок. Если бы изначально у Пятачка было 9 или более шариков, то даже сейчас Иа-Иа получил бы минимум 63 шарика, а это не так. Значит, Пятачок приготовил ровно 8 шариков. Если бы всё было хорошо, Иа-Иа получил бы 64 шарика, но так как 4 лопнули, значит, Пятачок подарил 4 шарика.

**4.3** На День Рождения Ослика Иа-Иа Винни-Пух, Сова и Пятачок решили подарить шарики, причем Винни-Пух приготовил шариков в два раза больше, чем Пятачок, а Сова — в четыре раза больше, чем Пятачок. Когда Пятачок нес свои шарики, он очень спешил, споткнулся, и часть шариков лопнула. На свой праздник Иа-Иа получил в сумме 44 шарика. Сколько же шариков в итоге подарил Пятачок?

**Ответ:** 2

*Решение.* Если бы Пятачок не лопнул свои шарики, то Иа-Иа получил бы ровно в 7 раз больше шариков, чем приготовил Пятачок. Следующее за 44 число, кратное 7 — это 49,  $49 : 7 = 7$ , то есть Пятачок приготовил не менее 6 шариков.

Если бы у Пятачка лопнули все шарики, то Иа-Иа получил бы ровно в 6 раз больше, чем приготовил Пятачок. Если бы изначально у Пятачка было 8 или более шариков, то даже сейчас Иа-Иа получил бы минимум 48 шариков, а это не так. Значит, Пятачок приготовил ровно 7 шариков. Если бы всё было хорошо, Иа-Иа получил бы 36 шариков, но оказалось, что 5 лопнули, значит, Пятачок подарил 2 шарика.

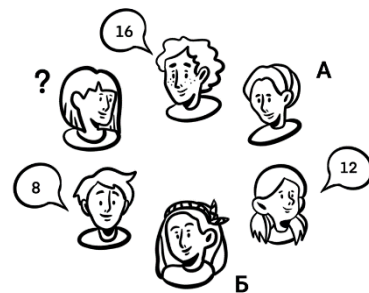
## Задание №5

5.1 Шесть детей встали по кругу и шепотом сообщили своё любимое число соседям справа и слева. Каждый ребенок сложил два услышанных числа и громко сказал их вслух. На рисунке показано, что сказали трое из детей. Какое число задумала девочка, рядом с которой стоит знак вопроса?



**Ответ:** 6.

*Решение.* Сложим известные нам числа:  $16 + 12 + 8 = 36$ . Получаем, что 36 — это числа, обозначенные на рисунке как А, Б и под знаком вопроса, но взятые по два раза. Следовательно,  $36 : 2 = 18$ , а сумма чисел А и Б равна 12. Значит, девочка загадала число 6, которое можно найти, если вычесть из 18 число 12.

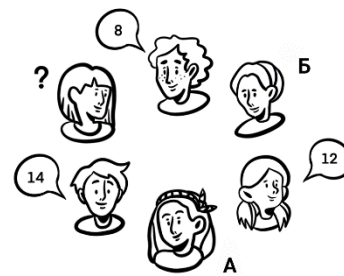


5.2 Шесть детей встали по кругу и шепотом сообщили своё любимое число соседям справа и слева. Каждый ребенок сложил два услышанных числа и громко сказал их вслух. На рисунке показано, что сказали трое из детей. Какое число задумала девочка, рядом с которой стоит знак вопроса?



**Ответ:** 5.

*Решение.* Сложим известные нам числа:  $8 + 14 + 12 = 34$ . Получаем, что 34 — это числа, обозначенные на рисунке как А, Б и под знаком вопроса, но взятые по два раза. Следовательно,  $34:2 = 17$ , а сумма чисел А и Б равна 12. Значит, девочка загадала число 5, которое можно найти, если вычесть из 17 число 12.





## Задание №6

---

**6.1.** Прямоугольник, периметр которого 100 см, семью вертикальными и десятью горизонтальными разрезами разделили на 88 одинаковых меньших прямоугольников. Чему равен периметр каждого из них, если сумма длин всех разрезов равна 434 см?

**Ответ:** 11

*Решение.* Заметим, что сумма семи вертикальных и семи горизонтальных разрезов равна  $7 \cdot 50 = 350$  см, поэтому три лишних горизонтальных разреза имеют суммарную длину 84 см, каждый из которых равен 28 см. Это длина горизонтальной стороны исходного прямоугольника. Вертикальная его сторона равна  $50 - 28 = 22$  см. После разрезов получается прямоугольник, горизонтальная сторона которого  $28/8 = 3,5$  см, а вертикальная  $22/11 = 2$  см, поэтому его периметр равен 11 см.

**Задача 4.6.2** Прямоугольник, периметр которого 100 см, шестью вертикальными и девятью горизонтальными разрезами разделили на 70 одинаковых меньших прямоугольников. Чему равен периметр каждого из них, если сумма длин всех разрезов равна 405 см?

**Ответ:** 13

*Решение.* Заметим, что сумма шести вертикальных и шести горизонтальных разрезов равна  $6 \cdot 50 = 300$  см, поэтому три лишних горизонтальных разреза имеют суммарную длину 105 см, каждый из которых равен 35 см. Это длина горизонтальной стороны исходного прямоугольника. Вертикальная его сторона равна  $50 - 35 = 15$  см. После разрезов получается прямоугольник, горизонтальная сторона которого  $35/7 = 5$  см, а вертикальная  $15/10 = 1,5$  см, поэтому его периметр равен 13 см.

**Задача 4.6.3** Прямоугольник, периметр которого 96 см, восемью вертикальными и одиннадцатью горизонтальными разрезами разделили на 108 одинаковых меньших прямоугольников. Чему равен периметр каждого из них, если сумма длин всех разрезов равна 438 см?

**Ответ:** 9

*Решение.* Заметим, что сумма восьми вертикальных и восьми горизонтальных разрезов равна  $8 \cdot 48 = 384$  см, поэтому три лишних горизонтальных разреза имеют суммарную длину 54 см, каждый из которых равен 18. Это длина горизонтальной стороны исходного прямоугольника. Вертикальная его сторона равна  $48 - 18 = 30$  см. После разрезов получается прямоугольник, горизонтальная сторона которого  $18/9 = 2$  см, а вертикальная  $30/12 = 2,5$  см, поэтому его периметр равен 9 см.

## Задание №7

---

**7.1** На острове Правды и Лжи есть рыцари, которые всегда говорят только правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 20 жителей острова выстроились по росту (от высокого к низкому, высокий — самый первый) для игры. Каждый должен был сказать одну из фраз: «Есть лжец ниже меня» или «Есть рыцарь выше меня». В итоге, стоящие на местах с третьего по седьмое сказали первую фразу, а остальные — вторую. Сколько рыцарей было среди этих 20 человек, если у всех жителей разный рост?

**Ответ:** 17

*Решение.* Шеренга не может состоять из одних лжецов (в таком случае 3-7 говорит правду). Рассмотрим самого высокого рыцаря, назовем его Р. Он мог сказать только первую фразу, значит, на местах 1 и 2 стоят лжецы, а Р стоит от 3 до 7 места. Кроме того, есть лжец, который ниже Р, назовем его Л. Этот лжец не может сказать вторую фразу, а значит, он говорит первую фразу, и стоит не позже 7 места, но и не раньше 4-го места. Значит, с 8 и по 20-е место стоят одни рыцари. На 3-м месте не может стоять лжец, так как есть лжец Л ниже его. Значит, на 3-м месте стоит Р. Если между Р и Л есть еще лжецы, то они должны произносить первую фразу, но Л ниже них, противоречие.

Получаем, что лжецы стоят на 1, 2 и 7 месте, а остальные места занимают рыцари.

**7.2** На острове Правды и Лжи есть рыцари, которые всегда говорят только правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 15 жителей острова выстроились по росту (от высокого к низкому, высокий — самый первый) для игры. Каждый должен был сказать одну из фраз: «Есть лжец ниже меня» или «Есть рыцарь выше меня». В итоге стоящие на местах с четвертого по восьмое сказали первую фразу, а остальные — вторую. Сколько рыцарей было среди этих 15 человек, если у всех жителей разный рост?

**Ответ:** 11

*Решение.* Шеренга не может состоять из одних лжецов (в таком случае 4-8 говорят правду). Рассмотрим самого высокого рыцаря, назовем его Р. Он мог сказать только первую фразу, значит, на местах 1, 2 и 3 стоят лжецы, а Р стоит от 4 до 8 места. Кроме того, есть лжец, который ниже Р, назовем его Л. Этот лжец не может сказать вторую фразу, а значит, он говорит первую фразу, и стоит не позже 8 места, но и не раньше 5-го места. Значит, с 9 и по 15-е место стоят одни рыцари. На 4-м месте не может стоять лжец, так как лжец Л ниже его. Значит, на 4-м месте стоит Р. Если между Р и Л есть еще лжецы, то они должны произносить первую фразу, но Л ниже них, а это противоречие.

Получаем, что лжецы стоят на 1, 2, 3 и 8 месте, а остальные места занимают рыцари.

**7.3** На острове Правды и Лжи есть рыцари, которые всегда говорят только правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 17 жителей острова выстроились по росту (от высокого к низкому, высокий — самый первый) для игры. Каждый должен был сказать одну из фраз: «Есть лжец ниже меня» или «Есть рыцарь выше меня». В итоге, стоящие на местах с третьего по шестое сказали первую фразу, а остальные — вторую. Сколько рыцарей было среди этих 17 человек, если у всех жителей разный рост?

**Ответ:** 14

*Решение.* Шеренга не может состоять из одних лжецов (в таком случае 3-6 говорят правду). Рассмотрим самого высокого рыцаря, назовем его Р. Он мог сказать только первую фразу, значит, на местах 1 и 2 стоят лжецы, а Р стоит от 3 до 6 места. Кроме того, есть лжец, который ниже Р, назовем его Л. Этот лжец не может сказать вторую фразу, а значит, он говорит первую фразу, и стоит не позже 6 места, но и не раньше 4-го места. Значит, с 7 и по 17-е место стоят одни рыцари. На 3-м месте не может стоять лжец, так как есть лжец Л ниже его. Значит, на 3-м месте стоит Р. Если между Р и Л есть еще лжецы, то они должны произносить первую фразу, но Л ниже них, противоречие.

Получаем, что лжецы стоят на 1, 2 и 6 месте, а остальные места занимают рыцари.

## Задание №8

---

**8.1** На 12 карточках написаны разные натуральные числа, их сумма равна 84. Маша выложила карточки в порядке возрастания. Чему может быть равна сумма чисел на двух средних карточках? Найдите все возможные ответы.

**Ответ:** 13, 14

*Решение.* Если бы на карточках были написаны наименьшие возможные натуральные числа, т.е. номера карточек (от 1 до 12), то их сумма была бы равна  $1+2+\dots+12 = 78$ . Но реальная сумма на 6 больше. Значит, какие-то числа больше их номеров. Если число на шестой карточке больше 6, то на карточках 7-12 числа тоже больше, и к сумме 78 прибавится минимум 7. Значит, на шестой карточке написано 6. На седьмой карточке может быть написано 7 (пример: 1, 2, 3, ..., 10, 11, 18), может быть написано число 8 (пример: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13). Число 9 не может быть написано, так как тогда на каждой следующей карточке число минимум на 2 больше своего номера, и к общей сумме прибавится минимум 12.

**8.2.** На 14 карточках написаны разные натуральные числа, их сумма равна 112. Маша выложила карточки в порядке возрастания. Чему может быть равна сумма чисел на двух средних карточках? Найдите все возможные ответы.

**Ответ:** 15, 16

*Решение.* Если бы на карточках были написаны наименьшие возможные натуральные числа, т.е. номера карточек (от 1 до 14), то их сумма была бы равна  $1 + 2 + \dots + 14 = 105$ . Но реальная сумма на 7 больше. Значит, какие-то числа больше их номеров. Если число на седьмой карточке больше 7, то на карточках 8-14 числа тоже больше, и к сумме 105 прибавится минимум 8. Значит, на седьмой карточке написано 7. На восьмой карточке может быть написано 8 (пример: 1, 2, 3, ..., 12, 13, 21), может быть написано число 9 (пример: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15). Число 10 не может быть написано, так как тогда на каждой следующей карточке число минимум на 2 больше своего номера, и к общей сумме прибавится минимум 14.

**8.3.** На 10 карточках написаны разные натуральные числа, их сумма равна 60. Маша выложила карточки в порядке возрастания. Чему может быть равна сумма чисел на двух средних карточках? Найдите все возможные ответы.

**Ответ:** 11, 12

*Решение.* Если бы на карточках были написаны наименьшие возможные натуральные числа, т.е. номера карточек (от 1 до 10), то их сумма была бы равна  $1 + 2 + \dots + 10 = 55$ . Но реальная сумма на 5 больше. Значит, какие-то числа больше их номеров. Если число на пятой карточке больше 5, то на карточках 6-10 числа тоже больше, и к сумме 55 прибавится минимум 6. Значит, на пятой карточке написано 5. На шестой карточке может быть написано 6 (пример: 1, 2, 3, ..., 8, 9, 15), может быть написано число 7 (пример: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11). Число 8 не может быть написано, так как тогда на каждой следующей карточке число минимум на 2 больше своего номера, и к общей сумме прибавится минимум 10.