Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ по математике

для 6 класса

2020/21 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Каждое точное совпадение ответа — 1 балл

Задание №1

1.1 Дворовый турнир по настольному теннису среди 15 игроков проводится по определенным правилам. В каждом туре жребием определяются два игрока, которые соревнуются друг с другом. После тура проигравший получает черную карточку. Тот, кто получает две черные карточки, выбывает из борьбы. Последний оставшийся игрок объявляется чемпионом. При этом в настольном теннисе не бывает ничьих. Сколько туров было в дворовом турнире, если чемпион проиграл ровно один раз?

Ответ*:* 29

Решение. В каждом матче всегда есть ровно один проигравший. Так как выбыли 14 игроков, то всего было $14 \cdot 2 + 1 = 29$ проигрышей.

1.2 Дворовый турнир по настольному теннису среди 17 игроков проводится по определенным правилам. В каждом туре жребием определяются два игрока, которые соревнуются друг с другом. После тура проигравший получает черную карточку. Тот, кто получает две черные карточки, выбывает из борьбы. Последний оставшийся игрок объявляется чемпионом. При этом в настольном теннисе не бывает ничьих. Сколько туров было в дворовом турнире, если чемпион проиграл ровно один раз?

Ответ: 33

1.3 Дворовый турнир по настольному теннису среди 14 игроков проводится по определенным правилам. В каждом туре жребием определяются два игрока, которые соревнуются друг с другом. После тура проигравший получает черную карточку. Тот, кто получает две черные карточки, выбывает из борьбы. Последний оставшийся игрок объявляется чемпионом. При этом в настольном теннисе не бывает ничьих. Сколько туров было в дворовом турнире, если чемпион проиграл ровно один раз?

Ответ: 27

1.4 Дворовый турнир по настольному теннису среди 13 игроков проводится по определенным правилам. В каждом туре жребием определяются два игрока, которые соревнуются друг с другом. После тура проигравший получает черную карточку. Тот, кто получает две черные карточки, выбывает из борьбы. Последний оставшийся игрок объявляется чемпионом. При этом в настольном теннисе не бывает ничьих. Сколько туров было в дворовом турнире, если чемпион проиграл ровно один раз?

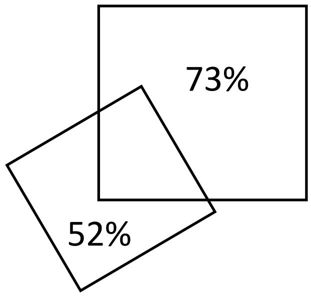
Ответ: 25

1.5 Дворовый турнир по настольному теннису среди 16 игроков проводится по определенным правилам. В каждом туре жребием определяются два игрока, которые соревнуются друг с другом. После тура проигравший получает черную карточку. Тот, кто получает две черные карточки, выбывает из борьбы. Последний оставшийся игрок объявляется чемпионом. При этом в настольном теннисе не бывает ничьих. Сколько туров было в дворовом турнире, если чемпион проиграл ровно один раз?

Ответ: 31

Задание №2

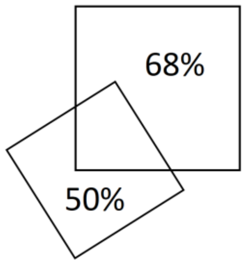
2.1 Два квадрата расположены так, как показано на рисунке. Если отсечь от маленького квадрата часть, пересекающуюся с большим, останется 52% его площади, у большого без их общей части останется 73% площади. Найдите, чему равно отношение стороны маленького квадрата к стороне большого.



Ответ: 0.75

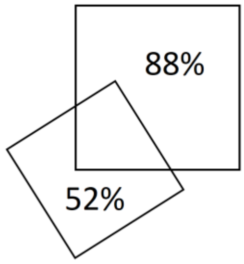
Решение. Заметим, что 27% площади большого квадрата равно 48% площади малого квадрата, то есть отношение площадей равно $\frac{27}{48} = \frac{9}{16}$. Но площадь каждого квадрата равна квадрату отношения сторон, поэтому стороны относятся как 3 ÷ 4 = 0.75.

2.2 Два квадрата расположены так, как показано на рисунке. Если отсечь от маленького квадрата часть, пересекающуюся с большим, останется 50% его площади, у большого без их общей части останется 68% площади. Найдите, чему равно отношение стороны маленького квадрата к стороне большого.



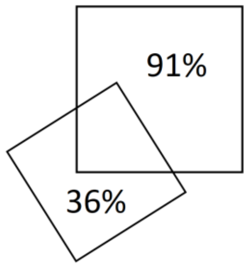
Ответ: 0.8

2.3 Два квадрата расположены так, как показано на рисунке. Если отсечь от маленького квадрата часть, пересекающуюся с большим, останется 52% его площади, у большого без их общей части останется 88% площади. Найдите, чему равно отношение стороны маленького квадрата к стороне большого.



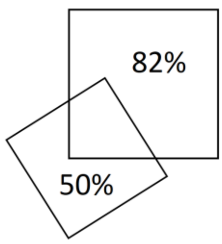
Ответ: 0.5

2.4 Два квадрата расположены так, как показано на рисунке. Если отсечь от маленького квадрата часть, пересекающуюся с большим, останется 36% его площади, у большого без их общей части останется 91% площади. Найдите, чему равно отношение стороны маленького квадрата к стороне большого.



Ответ: 0.375

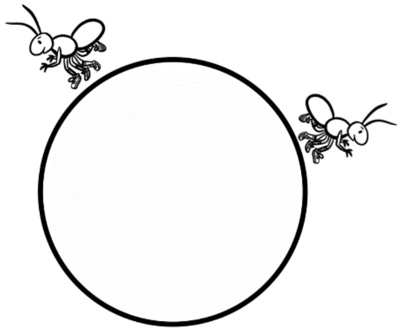
2.5 Два квадрата расположены так, как показано на рисунке. Если отсечь от маленького квадрата часть, пересекающуюся с большим, останется 50% его площади, у большого без их общей части останется 82% площади. Найдите, чему равно отношение стороны маленького квадрата к стороне большого.



Ответ: 0.6

Задание №3

3.1 Два муравья бегут по окружности навстречу друг другу с постоянными скоростями. Пока один из них пробегает 9 кругов, второй пробегает 6. Там, где муравьи встречаются, появляется красная точка. Сколько красных точек на окружности?



Ответ: 5

Решение. Соотношение скоростей муравьев равно $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. Без ограничения общности считаем длину окружности равной 5, и пусть муравьи встретятся в какой-то момент в точке 0. Поставим по часовой стрелке точки 1, 2, 3 и 4 так, чтобы они вместе с точкой 0 делили окружность на 5 равных частей. Если медленный муравей бежит против часовой стрелки, то в следующий раз они встретятся в точке 2. Теперь её можно считать стартовой, и значит, далее они встретятся в точке 4, а после этого — в точке 1 (так как 4 + 2 = 6, но длина окружности 5). Следующая встреча в точке 3, затем 0, после чего процесс зациклится, и точек будет всего 5.

3.2 Два муравья бегут по окружности навстречу друг другу с постоянными скоростями. Пока один из них пробегает 14 кругов, второй пробегает 4. Там, где муравьи встречаются, появляется красная точка. Сколько красных точек на окружности?

Ответ: 9

3.3 Два муравья бегут по окружности навстречу друг другу с постоянными скоростями. Пока один из них пробегает 10 кругов, второй пробегает 6. Там, где муравьи встречаются, появляется красная точка. Сколько красных точек на окружности?

Ответ: 8

3.4 Два муравья бегут по окружности навстречу друг другу с постоянными скоростями. Пока один из них пробегает 15 кругов, второй пробегает 33. Там, где муравьи встречаются, появляется красная точка. Сколько красных точек на окружности?

Ответ: 6

3.5 Два муравья бегут по окружности навстречу друг другу с постоянными скоростями. Пока один из них пробегает 8 кругов, второй пробегает 6. Там, где муравьи встречаются, появляется красная точка. Сколько красных точек на окружности?

Ответ: 7

Задание №4

4.1 Семь пиратов делили пять одинаковых сундуков с сокровищами. Они договорились, что пятеро из них возьмут себе по сундуку, а остальные получат справедливую компенсацию, равную стоимости сундука. Каждый из получателей сундука заплатил в общий фонд по 10000 пиастров, после этого деньги распределили между оставшимися пиратами. В какую сумму был оценен один сундук?

Ответ: 35000

Решение. Два пирата получили 50000 пиастров, следовательно доля каждого составила 25000. Так как сундуки были поделены справедливо, то общая сумма сокровищ составляла 25000 на семерых, всего 175000. Тогда 175000 — это стоимость пяти сундуков, то есть каждый сундук был оценен в 35000 пиастров.

4.2 Шесть пиратов делили четыре одинаковых сундука с сокровищами. Они договорились, что четверо из них возьмут себе по сундуку, а остальные получат справедливую компенсацию, равную стоимости сундука. Каждый из получателей сундука заплатил в общий фонд по 10000 пиастров, после этого деньги распределили между оставшимися пиратами. В какую сумму был оценен один сундук?

Ответ: 30000

4.3 Семь пиратов делили четыре одинаковых сундука с сокровищами. Они договорились, что четверо из них возьмут себе по сундуку, а остальные получат справедливую компенсацию, равную стоимости сундука. Каждый из получателей сундука заплатил в общий фонд по 30000 пиастров, после этого деньги распределили между оставшимися пиратами. В какую сумму был оценен один сундук?

Ответ: 70000

4.4 Девять пиратов делили пять одинаковых сундуков с сокровищами. Они договорились, что пятеро из них возьмут себе по сундуку, а остальные получат справедливую компенсацию, равную стоимости сундука. Каждый из получателей сундука заплатил в общий фонд по 12000 пиастров, после этого деньги распределили между оставшимися пиратами. В какую сумму был оценен один сундук?

Ответ: 27000

4.5 Восемь пиратов делили пять одинаковых сундуков с сокровищами. Они договорились, что пятеро из них возьмут себе по сундуку, а остальные получат справедливую компенсацию, равную стоимости сундука. Каждый из получателей сундука заплатил в общий фонд по 15000 пиастров, после этого деньги распределили между оставшимися пиратами. В какую сумму был оценен один сундук?

Ответ: 40000

Задание №5

5.1 У Маши есть красные и белые шарики. Если количество белых шариков увеличить в n раз, то в сумме у неё будет 101 шарик. А если увеличить в n раз количество только красных, то шариков будет 103. Сколько шариков у Маши сейчас? Найдите все варианты, если n — натуральное число.

Ответ: 51, 68

Решение. В первом случае прибавилось бы количество белых шариков, умноженное на (n - 1), а во втором случае —- количество красных шариков, умноженное на (n - 1). Оба этих числа делятся на (n - 1), но так как в первом случае получится 101, а во втором — 103, то они отличаются на 2. Следовательно, число 2 делится на (n - 1), откуда n = 2 или n = 3.

При n = 2 количество шариков увеличивается вдвое, то есть изначально красных шариков на 2 больше, чем белых. Пусть белых шариков b, тогда красных — b + 2. Получаем, что 101 = 2b + b + 2, откуда 3b = 99, b = 33, поэтому шариков у Маши сейчас 33 + 33 + 2 = 68.

При n=3 количество шариков увеличивается втрое, то есть изначально красных шариков на 1 больше, чем белых. Пусть белых шариков b, тогда красных — b + 1. Получаем, что 101 = 3b + b + 1, откуда 4b = 100, b = 25, поэтому шариков у Маши сейчас 25 + 26 = 51.

5.2 У Маши есть красные и белые шарики. Если количество белых шариков увеличить в n раз, то в сумме у неё будет 89 шариков. А если увеличить в n раз количество только красных, то шариков будет 91. Сколько шариков у Маши сейчас? Найдите все варианты, если n — натуральное число.

Ответ: 45, 60

5.3 У Маши есть красные и белые шарики. Если количество белых шариков увеличить в n раз, то в сумме у неё будет 125 шариков. А если увеличить в n раз количество только красных, то шариков будет 127. Сколько шариков у Маши сейчас? Найдите все варианты, если n — натуральное число.

Ответ: 63, 84

5.4 У Маши есть красные и белые шарики. Если количество белых шариков увеличить в n раз, то в сумме у нее будет 77 шариков. А если увеличить в n раз количество только красных, то шариков будет 79. Сколько шариков у Маши сейчас? Найдите все варианты, если n — натуральное число.

Ответ: 39, 52

5.5 У Маши есть красные и белые шарики. Если количество белых шариков увеличить в n раз, то в сумме у нее будет 113 шариков. А если увеличить в n раз количество только красных, то шариков будет 115. Сколько шариков у Маши сейчас? Найдите все варианты, если n — натуральное число.

Ответ: 57, 76

Задание №6

6.1 Скажем, что число А скрывает в себе число В, если из А можно вычеркнуть несколько цифр так, чтобы получить В (например, число 123 скрывает в себе числа 1, 2, 3, 12, 13 и 23). Найдите наименьшее натуральное число, которое скрывает в себе числа 2021, 2120, 1220 и 1202.

Ответ: 1201201

Решение. Заметим, что в числе есть минимум две двойки и один ноль. Если двоек ровно две, то ноль должен стоять и между ними, и после них, но тогда нуля минимум два. Следовательно, только на двойки и нули нужно 4 цифры (либо две двойки и два нуля, либо три двойки и ноль).

Если в числе одна единица, то до нее должны идти 2, 0, 2, а после — еще две двойки и ноль. При этом ноль стоит и между двойками, и после них (1220 и 1202), поэтому нужна еще одна двойка или еще один ноль, итого уже 8 цифр.

Пусть единиц две. Если двойки ровно две, то нужна единица после этих двоек (2021), между ними (2120) и перед ними (1220), что вызывает противоречие. Значит, двоек минимум три. Если цифр всего 6, то ноль — единственный. Тогда он стоит после двух двоек и перед одной. Из числа 1220 получаем, что одна из единиц стоит перед двумя первыми двойками и нулем, а из числа 2021 получаем, что другая единица стоит после последней двойки. Тогда однозначно получаем, что расстановка такова — 122021, но увы, из нее нельзя получить число 2120. Значит, одним нулем не обойдемся, и цифр у нас уже семь.

Пусть единиц три. На двойки и нули нужно еще 4 цифры, значит, цифр 7.

Пусть цифр семь. Первым стоит не ноль, а значит, 1. Если далее стоит 0, то он бесполезен (в наших числах 0 встречается только после двоек). Две единицы подряд или два нуля ставить смысла нет, так как в каждом из наших чисел 0 или 1 встречаются только один раз. Значит, во втором по старшинству разряде стоит 2, далее можно поставить 0, а далее — 1. 1201…У нас есть еще три цифры, одна из которых точно двойка. Из числа 1220 понимаем, что где-то за ней стоит ноль, а из числа 2021 — за ней стоит еще и единица. Наименьший такой вариант — 201, и он подходит.

Задание №7

7.1 В примере на сложение и вычитание ученик заменил цифры буквами по правилу: одинаковые буквы заменяются одинаковыми цифрами, разные буквы заменяются разными цифрами. Из какого количества разных примеров можно было получить запись $0 < \overline{\text{БА}} + \overline{\text{БА}} - \overline{\text{ЯГА}} < 10$?

Ответ: 31

Решение. Сумма двух двузначных чисел не больше 199, поэтому $\overline{\text{ЯГА}}$ — трехзначное число, начинающееся с 1, Я = 1. Посмотрим на последнюю цифру в каждом числе, А. Она два раза складывается и один раз вычитается, поэтому значение выражения равно А, и А ≠ 0. А≠1, так как Я = 1. Кроме того, Б ≥5, $\text{Б} + \text{Б} = \overline{\text{ЯГ}}$. Если Б = 5, то А — любая цифра, кроме 1, 0 и 5 (7 вариантов). Далее, если Б = 6, 7, 8, 9, то А — любая цифра, кроме 0, 1, Б и Г, а Г определяется как цифра в разряде единиц числа 2Б (она не равна 1, 0 или Б). Таким образов, в этих случаях остается по 6 вариантов. И всего вариантов 7 + 4 · 6 = 7 + 24 = 31 вариант.

7.2 В примере на сложение и вычитание ученик заменил цифры буквами по правилу: одинаковые буквы заменяются одинаковыми цифрами, разные буквы заменяются разными цифрами. Из какого количества разных примеров можно было получить запись $10 < \overline{\text{БА}} + \overline{\text{БА}} - \overline{\text{ЯГА}} < 20$?

Ответ: 18

7.3 В примере на сложение и вычитание ученик заменил цифры буквами по правилу: одинаковые буквы заменяются одинаковыми цифрами, разные буквы заменяются разными цифрами. Из какого количества разных примеров можно было получить запись $20 < \overline{\text{БА}} + \overline{\text{БА}} - \overline{\text{ЯГА}} < 30$?

Ответ: 25

7.4 В примере на сложение и вычитание ученик заменил цифры буквами по правилу: одинаковые буквы заменяются одинаковыми цифрами, разные буквы заменяются разными цифрами. Из какого количества разных примеров можно было получить запись $30 < \overline{\text{БА}} + \overline{\text{БА}} - \overline{\text{ЯГА}} < 40$?

Ответ: 12

7.5 В примере на сложение и вычитание ученик заменил цифры буквами по правилу: одинаковые буквы заменяются одинаковыми цифрами, разные буквы заменяются разными цифрами. Из какого количества разных примеров можно было получить запись $40 < \overline{\text{БА}} + \overline{\text{БА}} - \overline{\text{ЯГА}} < 50$?

Ответ: 19

Задание №8

8.1 На острове Правды живут только рыцари, которые говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Турист повстречал четырех жителей острова A,B,C,D. Житель A сказал туристу: «Ровно один из нас четверых — лжец». B сказал: «Все мы — лжецы». Тогда турист спросил у C: «Верно ли, что A — лжец?». Когда турист услышал ответ C («да» или «нет»), он точно смог вычислить, является A лжецом или нет. Кто из жителей может быть лжецом?

Только A, B и D

Только B и C

Только A и B

Точно A и B, а еще, возможно, D, но возможно, и нет

Точно B и C, а еще, возможно, D, но возможно, и нет

Ответ: точно A и B, а еще, возможно, D, но возможно, и нет

Решение. Рассмотрим первые два вопроса. B — точно лжец. Если A — рыцарь, то единственный вариант — РЛРР. Если же A — лжец, то остаются варианты ЛЛРР, ЛЛРЛ и ЛЛЛР (вариант, когда все лжецы, невозможен из-за ответа B). В первом и в четвертом C отвечает "нет", и турист не смог бы определить, кто A (так как в первом он рыцарь, а во втором — лжец). Значит, C ответил "да", остались второй и третий варианты, в которых A и B — лжецы, C — рыцарь, а D может как быть лжецом, так и не быть им.