

7 класс

1.1. Вася ехал на машине из Ивановки в Петровку. По пути он встретил указатель «До Петровки 50 км». Проехав еще 10 км, Вася увидел указатель «До Ивановки 100 км». Каково расстояние (в километрах) от Ивановки до Петровки?

1.2. Вася ехал на машине из Сосновки в Михайловку. По пути он встретил указатель «До Михайловки 60 км». Проехав еще 10 км, Вася увидел указатель «До Сосновки 120 км». Каково расстояние (в километрах) от Ивановки до Петровки?

1.3. Вася ехал на машине из Михайловки в Петровку. По пути он встретил указатель «До Петровки 60 км». Проехав еще 10 км, Вася увидел указатель «До Михайловки 110 км». Каково расстояние (в километрах) от Михайловки до Петровки?

1.4. Вася ехал на машине из Сосновки в Петровку. По пути он встретил указатель «До Петровки 70 км». Проехав еще 20 км, Вася увидел указатель «До Сосновки 130 км». Каково расстояние (в километрах) от Сосновки до Петровки?

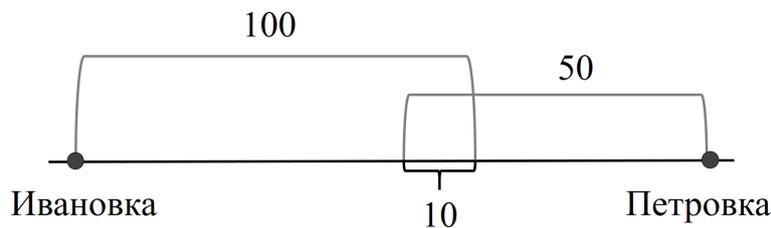
Ответ, вариант 1. 140.

Ответ, вариант 2. 170.

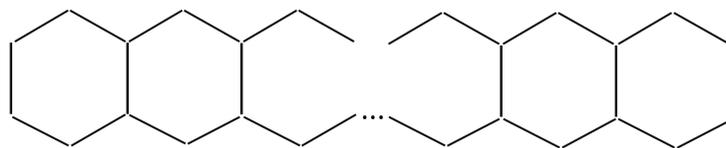
Ответ, вариант 3. 160.

Ответ, вариант 4. 180.

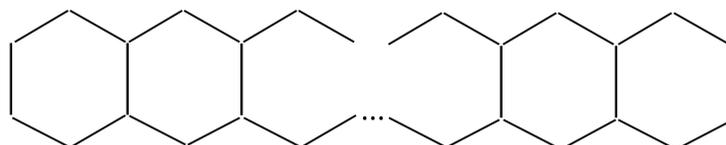
Решение варианта 1. Из схемы видно, что расстояние между Ивановкой и Петровкой равно 140 км.



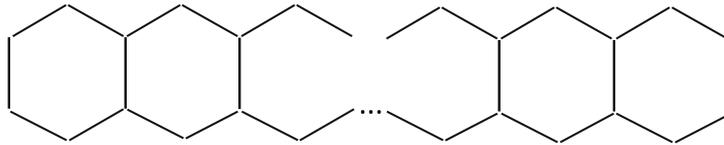
2.1. Из палочек одинаковой длины выложили ряд из 1000 шестиугольников так, как показано на рисунке. Сколько всего было использовано палочек?



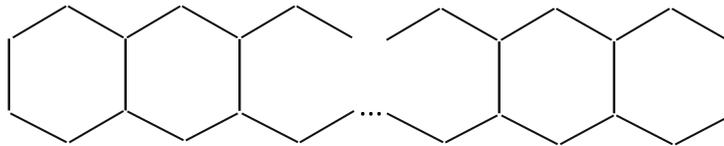
2.2. Из палочек одинаковой длины выложили ряд из 500 шестиугольников так, как показано на рисунке. Сколько всего было использовано палочек?



2.3. Из палочек одинаковой длины выложили ряд из 600 шестиугольников так, как показано на рисунке. Сколько всего было использовано палочек?



2.4. Из палочек одинаковой длины выложили ряд из 800 шестиугольников так, как показано на рисунке. Сколько всего было использовано палочек?



Ответ, вариант 1. 5001.

Ответ, вариант 2. 2501.

Ответ, вариант 3. 3001.

Ответ, вариант 4. 4001.

Решение варианта 1. В первом шестиугольнике 6 палочек. Построение каждого следующего шестиугольника добавляет 5 палочек. Итого получится $6 + 5 \cdot 999 = 5001$ палочка.

3.1. Натуральное число n записано различными цифрами, сумма которых равна 16. Чему может быть равна сумма цифр числа $n - 1$? Найдите все возможные варианты.

3.2. Натуральное число n записано различными цифрами, сумма которых равна 19. Чему может быть равна сумма цифр числа $n - 1$? Найдите все возможные варианты.

3.3. Натуральное число n записано различными цифрами, сумма которых равна 21. Чему может быть равна сумма цифр числа $n - 1$? Найдите все возможные варианты.

3.4. Натуральное число n записано различными цифрами, сумма которых равна 22. Чему может быть равна сумма цифр числа $n - 1$? Найдите все возможные варианты.

Ответ, вариант 1. 15 и 24 (два ответа).

Ответ, вариант 2. 18 и 27 (два ответа).

Ответ, вариант 3. 20 и 29 (два ответа).

Ответ, вариант 4. 21 и 30 (два ответа).

Решение варианта 1. Если число n не оканчивается на 0, то у числа $n - 1$ сумма цифр на 1 меньше, чем у n , то есть она равна 15. Если же число n оканчивается на 0, то только на один ноль (так как все цифры в десятичной записи числа n разные). Тогда, если число n имеет десятичную запись $n = \dots cba0$, число $n - 1$ имеет десятичную запись $n - 1 = \dots cb(a - 1)9$, поэтому сумма цифр числа $n - 1$ на 8 больше, чем у n , то есть она равна 24.

Для полноты решения осталось привести примеры, подтверждающие, что оба ответа действительно возможны. Для ответа 15 подходит число 97, для ответа 24 подходит число 970.

4.1. В прямоугольник 3×4 были записаны натуральные числа $1, 2, 3, \dots, 12$, каждое по одному разу. Таблица обладала свойством: в каждом столбце сумма верхних двух чисел в два раза больше нижнего числа. Со временем часть чисел стёрлась. Найдите все возможные варианты чисел, которые могли быть записаны на месте \star .

1			
3			
	5	8	\star

4.2. В прямоугольник 3×4 были записаны натуральные числа $1, 2, 3, \dots, 12$, каждое по одному разу. Таблица обладала свойством: в каждом столбце сумма верхних двух чисел в два раза больше нижнего числа. Со временем часть чисел стёрлась. Найдите все возможные варианты чисел, которые могли быть записаны на месте \star .

6			
4			
	2	11	\star

4.3. В прямоугольник 3×4 были записаны натуральные числа $1, 2, 3, \dots, 12$, каждое по одному разу. Таблица обладала свойством: в каждом столбце сумма верхних двух чисел в два раза больше нижнего числа. Со временем часть чисел стёрлась. Найдите все возможные варианты чисел, которые могли быть записаны на месте \star .

9			
7			
	2	5	\star

4.4. В прямоугольник 3×4 были записаны натуральные числа $1, 2, 3, \dots, 12$, каждое по одному разу. Таблица обладала свойством: в каждом столбце сумма верхних двух чисел в два раза больше нижнего числа. Со временем часть чисел стёрлась. Найдите все возможные варианты чисел, которые могли быть записаны на месте \star .

6			
4			
	8	11	\star

Ответ, вариант 1. 11.

Ответ, вариант 2. 8.

Ответ, вариант 3. 11.

Ответ, вариант 4. 2.

Решение варианта 1. По условию в левой нижней клетке написано число 2. Сумма двух неизвестных чисел во втором столбце равна 10, а в третьем столбце — 16. Поэтому сумма чисел в первых трёх столбцах равна $6 + 15 + 24$, а сумма всех чисел в таблице равна $1 + 2 + \dots + 12 = 78$. Значит, сумма чисел в четвёртом столбце равна $78 - 6 - 15 - 24 = 33$. Из условия следует, что на месте \star записана треть от 33, то есть число 11.

Замечание. Расстановка чисел, описанная в условии, действительно возможна. Например, такая:

1	6	9	10
3	4	7	12
2	5	8	11

5.1. 10 детей выстроились в круг. Каждый задумал целое число и сообщил его своему соседу по часовой стрелке. Затем каждый громко назвал сумму своего числа и числа соседа против часовой стрелки. Первый сказал «1», следующий по часовой стрелке — «2», следующий по часовой стрелке — «3» и т. д., девятый сказал «9». Какое число назвал оставшийся ребёнок?

5.2. 10 детей выстроились в круг. Каждый задумал целое число и сообщил его своему соседу по часовой стрелке. Затем каждый громко назвал сумму своего числа и числа соседа против часовой стрелки. Первый сказал «5», следующий по часовой стрелке — «6», следующий по часовой стрелке — «7» и т. д., девятый сказал «13». Какое число назвал оставшийся ребёнок?

5.3. 10 детей выстроились в круг. Каждый задумал целое число и сообщил его своему соседу по часовой стрелке. Затем каждый громко назвал сумму своего числа и числа соседа против часовой стрелки. Первый сказал «10», следующий по часовой стрелке — «11», следующий по часовой стрелке — «12» и т. д., девятый сказал «18». Какое число назвал оставшийся ребёнок?

5.4. 10 детей выстроились в круг. Каждый задумал целое число и сообщил его своему соседу по часовой стрелке. Затем каждый громко назвал сумму своего числа и числа соседа против часовой стрелки. Первый сказал «10», следующий по часовой стрелке — «9», следующий по часовой стрелке — «8» и т. д., девятый сказал «2». Какое число назвал оставшийся ребёнок?

Ответ, вариант 1. 5.

Ответ, вариант 2. 9.

Ответ, вариант 3. 14.

Ответ, вариант 4. 6.

Решение варианта 1. Сумма всех десяти задуманных чисел получится, если сложить то, что сказал первый ребёнок с тем, что сказали третий, пятый, седьмой и девятый. Аналогично, сложим то, что сказали второй, четвёртый, шестой, восьмой и десятый. Снова получится сумма всех десяти задуманных чисел, поэтому должно выполняться равенство $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 2 + 4 + 6 + 8 + x$, где x — названное десятым ребёнком число. Отсюда $x = 5$.

Замечание. Где использовалось условие, что задуманы именно целые числа? Нигде. Решение проходит для нецелых чисел тоже.

6.1. На острове живёт 2021 абориген, каждый из которых или рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт. Все жители имеют разный рост. Однажды каждый абориген сказал: «Все остальные жители выше меня!». Какое наибольшее количество аборигенов могли сказать минуту спустя: «Все остальные жители ниже меня!»?

6.2. На острове живёт 1000 аборигенов, каждый из которых или рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт. Все жители имеют разный рост. Однажды каждый абориген сказал: «Все остальные жители ниже меня!». Какое наибольшее количество аборигенов могли сказать минуту спустя: «Все остальные жители выше меня!»?

6.3. На острове живёт 500 аборигенов, каждый из которых или рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт. Все жители имеют разный рост. Однажды каждый абориген сказал: «Все остальные жители выше меня!». Какое наибольшее количество аборигенов могли сказать минуту спустя: «Все остальные жители ниже меня!»?

6.4. На острове живёт 456 аборигенов, каждый из которых или рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда лжёт. Все жители имеют разный рост. Однажды каждый абориген сказал: «Все остальные жители ниже меня!». Какое наибольшее количество аборигенов могли сказать минуту спустя: «Все остальные жители выше меня!»?

Ответ, вариант 1. 2019.

Ответ, вариант 2. 998.

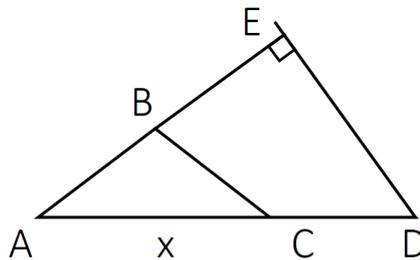
Ответ, вариант 3. 498.

Ответ, вариант 4. 454.

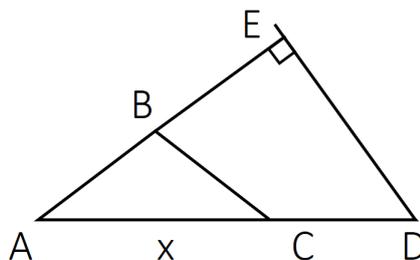
Решение варианта 1. Оценка. Рассмотрим самого высокого и самого низкого аборигенов. Для каждого из них одна из произнесённых фраз истинна, другая ложна. Значит, кем бы они ни были — рыцарями или лжецами — произнести вторую фразу минуту спустя никто из них не мог. Поэтому произнесённых фраз не более $2021 - 2 = 2019$.

Пример. Приведём пример, показывающий, что все аборигены, кроме двух, могли произнести вторую фразу. Пусть рост аборигенов $1, 2, 3, \dots, 2021$. Первый из них — рыцарь, остальные — лжецы. Тогда в первый день все могут произнести фразу: для первого она будет верной, для остальных — ложной. На следующий день фразу могут произнести все аборигены, кроме самого низкого и самого высокого, то есть 2019 человек.

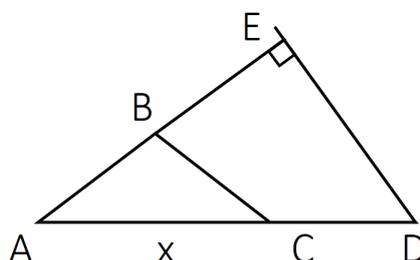
7.1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно x , а боковая сторона равна 10. На луче AC отмечена точка D так, что $AD = 20$. Из точки D опустили перпендикуляр DE на прямую AB . Найдите x , если известно, что $BE = 3$.



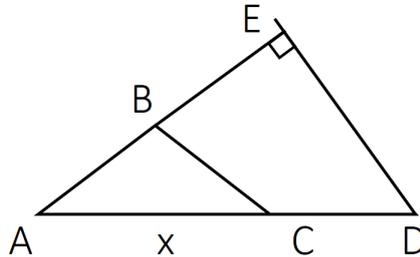
7.2. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно x , а боковая сторона равна 12. На луче AC отмечена точка D так, что $AD = 24$. Из точки D опустили перпендикуляр DE на прямую AB . Найдите x , если известно, что $BE = 5$.



7.3. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно x , а боковая сторона равна 10. На луче AC отмечена точка D так, что $AD = 20$. Из точки D опустили перпендикуляр DE на прямую AB . Найдите x , если известно, что $BE = 4$.



7.4. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно x , а боковая сторона равна 12. На луче AC отмечена точка D так, что $AD = 24$. Из точки D опустили перпендикуляр DE на прямую AB . Найдите x , если известно, что $BE = 6$.



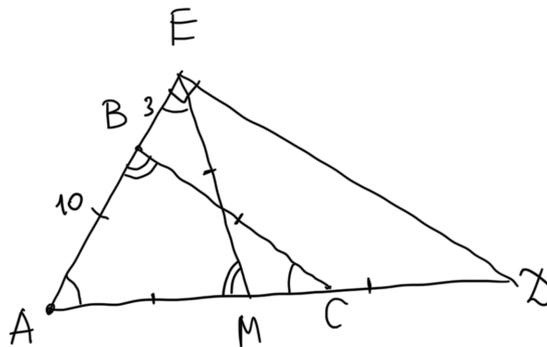
Ответ, вариант 1. 13.

Ответ, вариант 2. 17.

Ответ, вариант 3. 14.

Ответ, вариант 4. 18.

Решение варианта 1. В треугольнике AED угол при вершине E прямой. В прямоугольном треугольнике для решения задачи часто бывает полезным провести медиану из вершины прямого угла. Если EM — медиана, то она равна половине гипотенузы AD , то есть $EM = MA = MD = 10$.



Рассмотрим равнобедренные треугольники AME и ABC . Их боковые стороны равны 10, углы при основании в каждом из них равны углу BAC . Значит, в этих треугольниках равны и углы при вершинах, тогда и сами треугольники равны по первому признаку. Следовательно, $AC = AE = AB + BE = 13$.

8.1. Саша — любитель пить кофе на работе, поэтому каждое утро перед работой готовит термос любимого напитка по строгому ритуалу. Он варит в турке 200 мл крепчайшего ароматного кофе. Далее Саша 8 раз повторяет следующие действия: 100 мл из турки он выливает в термос, а в турку добавляет 100 мл воды, и тщательно перемешивает. После 8-го раза Саша переливает все 200 мл из турки в термос. Какова будет концентрация исходного крепчайшего ароматного кофе в термосе? Изначально термос пустой.

Концентрация — это число от 0 до 1. Ответ дайте в виде дроби (обыкновенной или десятичной), а не в виде процентов.

8.2. Саша — любитель пить кофе на работе, поэтому каждое утро перед работой готовит термос любимого напитка по строгому ритуалу. Он варит в турке 150 мл крепчайшего ароматного кофе. Далее Саша 6 раз повторяет следующие действия: 100 мл из турки он выливает в термос, а в турку добавляет 100 мл воды, и тщательно перемешивает. После 6-го раза Саша переливает все 150 мл из турки в термос. Какова будет концентрация исходного крепчайшего ароматного кофе в термосе? Изначально термос пустой.

Концентрация — это число от 0 до 1. Ответ дайте в виде дроби (обыкновенной или десятичной), а не в виде процентов.

8.3. Саша — любитель пить кофе на работе, поэтому каждое утро перед работой готовит термос любимого напитка по строгому ритуалу. Он варит в турке 100 мл крепчайшего ароматного кофе. Далее Саша 8 раз повторяет следующие действия: 50 мл из турки он выливает в термос, а в турку добавляет 50 мл воды, и тщательно перемешивает. После 8-го раза Саша переливает все 100 мл из турки в термос. Какова будет концентрация исходного крепчайшего ароматного кофе в термосе? Изначально термос пустой.

Концентрация — это число от 0 до 1. Ответ дайте в виде дроби (обыкновенной или десятичной), а не в виде процентов.

8.4. Саша — любитель пить кофе на работе, поэтому каждое утро перед работой готовит термос любимого напитка по строгому ритуалу. Он варит в турке 300 мл крепчайшего ароматного кофе. Далее Саша 6 раз повторяет следующие действия: 200 мл из турки он выливает в термос, а в турку добавляет 200 мл воды, и тщательно перемешивает. После 6-го раза Саша переливает все 300 мл из турки в термос. Какова будет концентрация исходного крепчайшего ароматного кофе в термосе? Изначально термос пустой.

Концентрация — это число от 0 до 1. Ответ дайте в виде дроби (обыкновенной или десятичной), а не в виде процентов.

Ответ, вариант 1. 0.2.

Ответ, вариант 2. 0.2.

Ответ, вариант 3. 0.2.

Ответ, вариант 4. 0.2.

Решение варианта 1. Заметим, что к окончанию ритуала в термосе будет 200 мл кофе и 800 мл воды. Значит, концентрация кофе равна $200/1000 = 1/5 = 0.2$.

Замечание. Можно было бы попытаться решать задачу «по шагам»: посчитать концентрацию кофе в термосе после первого переливания, после второго, и т.д. При таком ходе решения получаются сложные выражения, и вероятность дорешать задачу минимальна.