

*Работа рассчитана на 235 минут*

1. Докажите, что число  $2^6 + 2^5 19^3 + 2^4 19^3 + 2^3 19^6 + 2^2 19^6 + 19^9$  является составным.
2. Сколько существует натуральных чисел, больших единицы, произведение которых на свой наименьший простой делитель не больше 100?
3. Целые числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a^3/(a+b)$  - целое. Доказать, что  $b^4/(a+b)$  тоже целое.
4. Клетки квадрата  $n \times n$  покрасили в  $n$  цветов, по  $n$  клеток в каждый цвет. При каких  $n$  можно так раскрасить квадрат, что в каждом ряду и каждом столбце будут клетки ровно двух цветов?
5. В треугольнике  $ABC$   $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 105^\circ$ . На биссектрисе угла  $A$  взяли точку  $D$  так, что  $\angle ADC = 150^\circ$ . Доказать, что  $AD = BC$ .
6. Каждую неделю по SMS-кам слушателей выбирают десять популярнейших песен. Известно, что 1) никогда не выбирают один и тот же набор песен в одном и том же порядке две недели подряд; 2) песня, однажды опустившаяся в рейтинге, в дальнейшем уже не поднимается. Какое наибольшее число недель могут продержаться в рейтинге одни и те же 10 песен?