

## 8 класс

(Время выполнения заданий – 4 часа.

Во всех задачах ответ нужно обосновать.)

**8.1.** Если в произведении двух натуральных чисел один сомножитель увеличить на 2, а другой уменьшить на 2, то произведение чисел не изменится. Докажите, что если к этому произведению прибавить 1, то получится квадрат целого числа.

**8.2.** На прямой расположены синие и красные точки, красных точек не меньше 5. Известно, что на любом отрезке с концами в красных точках, содержащем внутри красную точку, есть по крайней мере 3 синие точки. А на любом отрезке, с концами в синих точках, содержащем внутри 2 синих точки, есть по крайней мере 2 красные точки. Какое наибольшее количество синих точек может быть на отрезке с концами в красных точках, не содержащем других красных точек?

**8.3.** В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = BC$ ) проведена высота  $AH$ , а из середины  $M$  стороны  $AB$  опущен перпендикуляр  $MK$  на сторону  $AC$ . Оказалось, что  $AH = MK$ . Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если  $AK = a$ .

**8.4.** В замке 25 одинаковых квадратных комнат, образующих квадрат  $5 \times 5$ . В эти комнаты по одному человеку поселилось 25 человек – лжецы и рыцари (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду). Каждый из этих 25 человек сказал: «По крайней мере в одной из соседних с моей комнат живет лжец». Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди этих 25 человек? Комнаты считаются соседними, если у них общая стена.

**8.5.** Есть 90 карточек – 10 с цифрой 1, 10 с цифрой 2, ..., 10 с цифрой 9. Из всех этих карточек составили два числа, одно из которых в три раза больше другого. Докажите, что одно из этих чисел можно разложить на четыре не обязательно различных натуральных множителя, больших единицы.