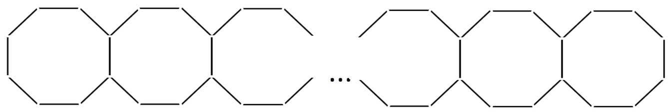
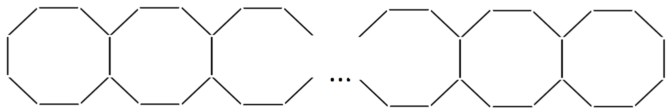
8 класс

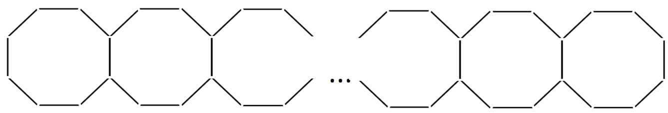
1.1. Из палочек одинаковой длины выложили ряд из 1000 восьмиугольников так, как показано на рисунке. Сколько всего было использовано палочек?



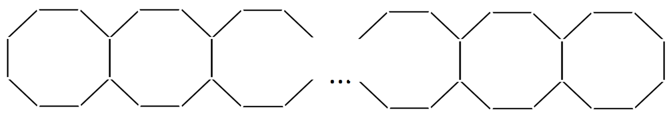
1.2. Из палочек одинаковой длины выложили ряд из 500 восьмиугольников так, как показано на рисунке. Сколько всего было использовано палочек?



1.3. Из палочек одинаковой длины выложили ряд из 800 восьмиугольников так, как показано на рисунке. Сколько всего было использовано палочек?



1.4. Из палочек одинаковой длины выложили ряд из 700 восьмиугольников так, как показано на рисунке. Сколько всего было использовано палочек?



Ответ, вариант 1. 7001.

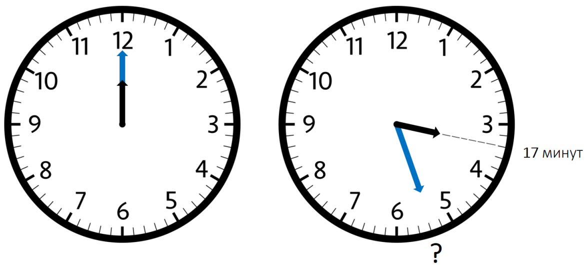
Ответ, вариант 2. 3501.

Ответ, вариант 3. 5601.

Ответ, вариант 4. 4901.

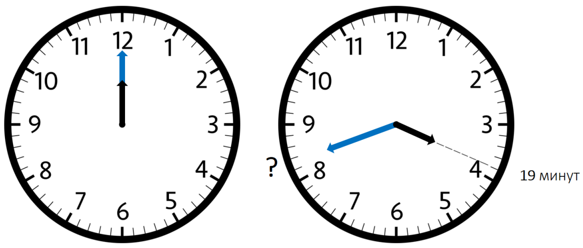
Решение варианта 1. В первом восьмиугольнике 8 палочек. Построение каждого следующего восьмиугольника добавляет 7 палочек. Итого получится $8+7\cdot 999=7001$ палочка.

2.1. Стандартный 12-часовой циферблат часов устроен так, как показано на рисунке. В полдень обе стрелки — часовая и минутная — были вертикальны, а теперь часовая стрелка в точности показывает на отметку «17 минут».



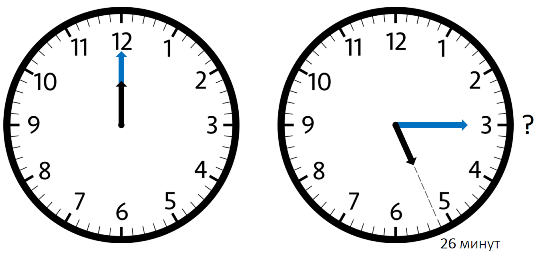
На какую отметку (в минутах) показывает в этот момент времени минутная стрелка?

2.2. Стандартный 12-часовой циферблат часов устроен так, как показано на рисунке. В полдень обе стрелки — часовая и минутная — были вертикальны, а теперь часовая стрелка в точности показывает на отметку «19 минут».



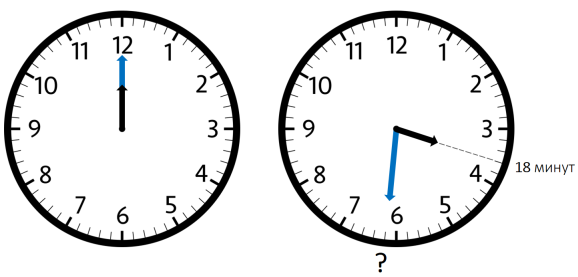
На какую отметку (в минутах) показывает в этот момент времени минутная стрелка?

2.3. Стандартный 12-часовой циферблат часов устроен так, как показано на рисунке. В полдень обе стрелки — часовая и минутная — были вертикальны, а теперь часовая стрелка в точности показывает на отметку «26 минут».



На какую отметку (в минутах) показывает в этот момент времени минутная стрелка?

2.4. Стандартный 12-часовой циферблат часов устроен так, как показано на рисунке. В полдень обе стрелки — часовая и минутная — были вертикальны, а теперь часовая стрелка в точности показывает на отметку «18 минут».



На какую отметку (в минутах) показывает в этот момент времени минутная стрелка?

Ответ, вариант 1. 24.

Ответ, вариант 2. 48.

Ответ, вариант 3. 12.

Ответ, вариант 4. 36.

Решение варианта 1. От полудня до текущего момента часовая стрелка прошла расстояние в 12 раз большее, чем минутная. Часовая прошла 17 делений, значит, минутная прошла$12 \cdot 17 = 204$ деления. Вычитая из 204 по 60 делений столько раз, сколько возможно (то есть учитывая, что минутная стрелка прошла несколько полных кругов), получаем $204 - 3 \cdot 60 = 24$.

3.1. Натуральное число n записано различными цифрами, сумма которых равна 37. Чему может быть равна сумма цифр числа $n-1$? Найдите все возможные варианты.

3.2. Натуральное число n записано различными цифрами, сумма которых равна 39. Чему может быть равна сумма цифр числа $n-1$? Найдите все возможные варианты.

3.3. Натуральное число n записано различными цифрами, сумма которых равна 42. Чему может быть равна сумма цифр числа $n-1$? Найдите все возможные варианты.

3.4. Натуральное число n записано различными цифрами, сумма которых равна 44. Чему может быть равна сумма цифр числа $n-1$? Найдите все возможные варианты.

Ответ, вариант 1. 36 и 45 (два ответа).

Ответ, вариант 2. 38 и 47 (два ответа).

Ответ, вариант 3. 41 и 50 (два ответа).

Ответ, вариант 4. 43 и 52 (два ответа).

Решение варианта 1. Если число n не оканчивается на 0, то у числа $n-1$ сумма цифр на 1 меньше, чем у n, то есть она равна 36. Если же число n оканчивается на 0, то только на один ноль (так как все цифры в десятичной записи числа n разные). Тогда, если число n имеет десятичную запись $n = \overline{\ldots cba0}$, число $n-1$ имеет десятичную запись $n-1 = \overline{\ldots cb(a-1)9}$, поэтому сумма цифр числа $n-1$ на 8 больше, чем у n, то есть она равна 45.

Для полноты решения осталось привести примеры, подтверждающие, что оба ответа действительно возможны. Для ответа 36 подходит число 12345679, для ответа 45 подходит число 123456790.

4.1. В параллелограмме $ABCD$ угол при вершине A равен 60°, $AB = 78$ и $BC = 87$. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок AD в точке E, а луч CD в точке F. Найдите длину отрезка EF.

4.2. В параллелограмме $ABCD$ угол при вершине A равен 60°, $AB = 75$ и $BC = 88$. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок AD в точке E, а луч CD в точке F. Найдите длину отрезка EF.

4.3. В параллелограмме $ABCD$ угол при вершине A равен $60°$, $AB = 69$ и $BC = 81$. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок AD в точке E, а луч CD в точке F. Найдите длину отрезка EF.

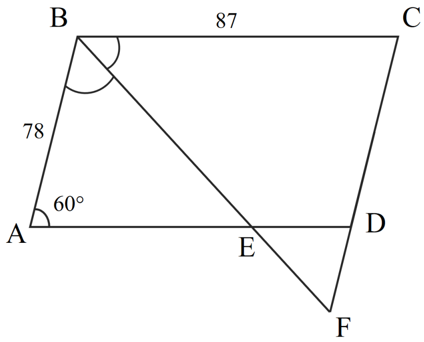
4.4. В параллелограмме $ABCD$ угол при вершине A равен $60°$, $AB = 73$ и $BC = 88$. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок AD в точке E, а луч CD в точке F. Найдите длину отрезка EF.

Ответ, вариант 1. 9.

Ответ, вариант 2. 13.

Ответ, вариант 3. 12.

Ответ, вариант 4. 15.

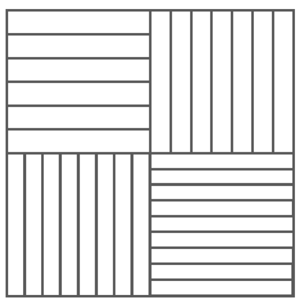


Решение варианта 1. Прямые AD и BC параллельны, поэтому

$$\angle ABC = 180° - \angle BAD = 120°$$

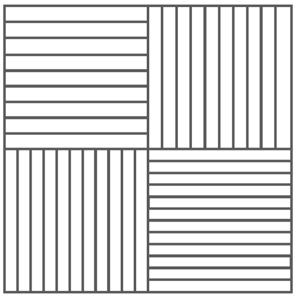
(углы ABC и BAD — внутренние односторонние). Тогда $\angle ABE = 60°$ и $\angle CBE = 60°$, поскольку BE — биссектриса угла ABC. В треугольнике ABE углы при вершинах A и B равны $60°$. Тогда угол при вершине E тоже равен $60°$, и этот треугольник равносторонний. Значит, $BE = AB = 78$. Также в треугольнике BCF углы при вершинах B и C равны по $60°$. Итого, этот треугольник тоже равносторонний, поэтому $BF = BC = 87$. Таким образом, $EF = BF - BE = 87 - 78 = 9$.

5.1. Квадрат разрезан на четыре равных квадрата. Каждый из них разрезан на 6, 7, 8 и 9 равных прямоугольников так, как показано на рисунке.



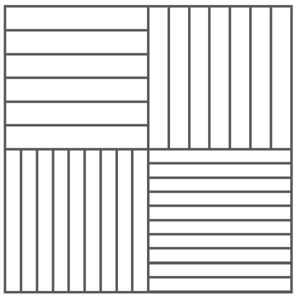
Длины сторон всех прямоугольников являются целыми числами. Найдите наименьшую возможную длину стороны исходного квадрата.

5.2. Квадрат разрезан на четыре равных квадрата. Каждый из них разрезан на 9, 10, 11 и 12 равных прямоугольников так, как показано на рисунке.



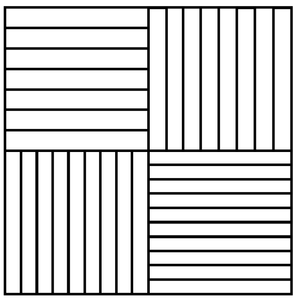
Длины сторон всех прямоугольников являются целыми числами. Найдите наименьшую возможную длину стороны исходного квадрата.

5.3. Квадрат разрезан на четыре равных квадрата. Каждый из них разрезан на 6, 7, 9 и 10 равных прямоугольников так, как показано на рисунке.



Длины сторон всех прямоугольников являются целыми числами. Найдите наименьшую возможную длину стороны исходного квадрата.

5.4. Квадрат разрезан на четыре равных квадрата. Каждый из них разрезан на 7, 8, 9 и 10 равных прямоугольников так, как показано на рисунке.



Длины сторон всех прямоугольников являются целыми числами. Найдите наименьшую возможную длину стороны исходного квадрата.

Ответ, вариант 1. 1008.

Ответ, вариант 2. 3960.

Ответ, вариант 3. 1260.

Ответ, вариант 4. 5040.

Решение варианта 1. *Оценка.* Длина стороны каждого из четырёх квадратов делится на 6, на 7, на 8 и на 9, то есть делится на $\text{НОК}(6,7,8,9) = 504$. Значит, она не меньше 504. Следовательно, сторона исходного квадрата не меньше 1004.

Пример. Квадрат со стороной 1004 разрезать нужным образом можно. Режем его на четыре квадрата 504×504, а их режем на 6 прямоугольников $504/6 \times 504$, на 7 прямоугольников $504/7 \times 504$, на 8 прямоугольника $504/8 \times 504$, на 9 прямоугольников $504/9 \times 504$.

6.1. Чтобы освободиться из невода Ивана-рыбака, Золотая рыбка даёт ему награду: или 4 жемчужины и 1 бриллиант; или 2 изумруда и 2 бриллианта; или 2 жемчужины, 1 изумруд и 1 бриллиант. За несколько освобождений Золотой рыбки Иван-рыбак получил 2000 жемчужин, 800 изумрудов и какое-то количество бриллиантов. Сколько раз Золотая рыбка попадала к Ивану-рыбаку в невод?

6.2. Чтобы освободиться из невода Ивана-рыбака, Золотая рыбка даёт ему награду: или 4 жемчужины и 1 бриллиант; или 2 изумруда и 2 бриллианта; или 2 жемчужины, 1 изумруд и 1 бриллиант. За несколько освобождений Золотой рыбки Иван-рыбак получил 1000 жемчужин, 600 изумрудов и какое-то количество бриллиантов. Сколько раз Золотая рыбка попадала к Ивану-рыбаку в невод?

6.3. Чтобы освободиться из невода Ивана-рыбака, Золотая рыбка даёт ему награду: или 4 жемчужины и 1 бриллиант; или 2 изумруда и 2 бриллианта; или 2 жемчужины, 1 изумруд и 1 бриллиант. За несколько освобождений Золотой рыбки Иван-рыбак получил 4000 жемчужин, 800 изумрудов и какое-то количество бриллиантов. Сколько раз Золотая рыбка попадала к Ивану-рыбаку в невод?

6.4. Чтобы освободиться из невода Ивана-рыбака, Золотая рыбка даёт ему награду: или 4 жемчужины и 1 бриллиант; или 2 изумруда и 2 бриллианта; или 2 жемчужины, 1 изумруд и 1 бриллиант. За несколько освобождений Золотой рыбки Иван-рыбак получил 1000 жемчужин, 800 изумрудов и какое-то количество бриллиантов. Сколько раз Золотая рыбка попадала к Ивану-рыбаку в невод?

Ответ, вариант 1. 900.

Ответ, вариант 2. 550.

Ответ, вариант 1. 1400.

Ответ, вариант 2. 650.

Решение варианта 1. Пусть было x действий первого вида, y действий второго вида и z действий третьего вида. Из условия задачи получаем два уравнений $4x + 2z = 2000$, $2y + z = 800$, а найти надо $x + y + z$. Складывая первое равенство с удвоенным вторым, получаем $4x + 4y + 4z = 3600$, откуда $x + y + z = 900$.

Замечание. Описанная в условии ситуация действительно возможна, например, при $x = 499$, $y = 399$ и $z = 2$. Есть много других вариантов.

7.1. Садоводческое товарищество представляет из себя квадрат 8×8, разделённый на 64 равных квадратных участка. На участках растут одуванчики. На каком-то участке 10 одуванчиков, а на каком-то — 23. Количество одуванчиков на каждом участке отличается от количества одуванчиков на любом соседнем (то есть участке, имеющем с ним одну общую сторону) ровно на 1. Сколько может быть участков, на которых 23 одуванчика? Найдите все возможные варианты.

7.2. Садоводческое товарищество представляет из себя квадрат 8×8, разделённый на 64 равных квадратных участка. На участках растут одуванчики. На каком-то участке 20 одуванчиков, а на каком-то — 7. Количество одуванчиков на каждом участке отличается от количества одуванчиков на любом соседнем (то есть участке, имеющем с ним одну общую сторону) ровно на 1. Сколько может быть участков, на которых 20 одуванчиков? Найдите все возможные варианты.

7.3. Садоводческое товарищество представляет из себя квадрат 8×8, разделённый на 64 равных квадратных участка. На участках растут одуванчики. На каком-то участке 5 одуванчиков, а на каком-то — 18. Количество одуванчиков на каждом участке отличается от количества одуванчиков на любом соседнем (то есть участке, имеющем с ним одну общую сторону) ровно на 1. Сколько может быть участков, на которых 18 одуванчиков? Найдите все возможные варианты.

7.4. Садоводческое товарищество представляет из себя квадрат 8×8, разделённый на 64 равных квадратных участка. На участках растут одуванчики. На каком-то участке 19 одуванчиков, а на каком-то — 6. Количество одуванчиков на каждом участке отличается от количества одуванчиков на любом соседнем (то есть участке, имеющем с ним одну общую сторону) ровно на 1. Сколько может быть участков, на которых 19 одуванчиков? Найдите все возможные варианты.

Ответ, вариант 1. 1 или 2 (два ответа).

Ответ, вариант 2. 1 или 2 (два ответа).

Ответ, вариант 3. 1 или 2 (два ответа).

Ответ, вариант 4. 1 или 2 (два ответа).

Решение варианта 1. Будем двигаться по любому из кратчайших путей из участка, где 10 одуванчиков, на участок, где 23 одуванчика, каждый раз переходя в соседний участок. Количество одуванчиков возрастёт с 10 до 23. Это возможно только в двух случаях: 10 находятся в углу, а 23 – рядом с противоположным углом (см. рис. 1), или 23 находится в углу, а 10 — рядом с противоположным углом (см. рис. 2).

							23
10							

Рис. 1.

							23
	10						

Рис. 2.

В любом кратчайшем пути из участка с 10 одуванчиками в участок с 23 одуванчиками будет 13 ходов. В любом кратчайшем пути длины 13 *при каждом* переходе на соседний участок количество одуванчиков должно увеличиваться на 1: если оно хотя бы раз уменьшится на единицу, то за все ходы число одуванчиков не успеет возрасти с 10 до 23. Поэтому количества одуванчиков в первом и втором случаях такие, как на рисунках 3 и 4.

	17	18	19	20	21	22	23
	16	17	18	19	20	21	22
	15	16	17	18	19	20	21
	14	15	16	17	18	19	20
	13	14	15	16	17	18	19
	12	13	14	15	16	17	18
	11	12	13	14	15	16	17
	10	11	12	13	14	15	16

Рис. 3.

16	17	18	19	20	21	22	23
15	16	17	18	19	20	21	22
14	15	16	17	18	19	20	21
13	14	15	16	17	18	19	20
12	13	14	15	16	17	18	19
11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17

Рис. 4.

Осталось понять, сколько чисел, равных 23, может быть на оставшихся клетках. На рисунке 3 числа 23 в левом столбце вообще быть не может. А на рисунке 4 в верхней строке либо числа 23 нет вообще (см. рис. 5), либо есть, но только одно (см. рис. 6). Больше одного числа 23 в верхней строке быть не может, так как 23 может располагаться только выше клетки с числом 22.

15	16	17	18	19	20	21	22
16	17	18	19	20	21	22	23
15	16	17	18	19	20	21	22
14	15	16	17	18	19	20	21
13	14	15	16	17	18	19	20
12	13	14	15	16	17	18	19
11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17

Рис. 5.

17	18	19	20	21	22	23	24
16	17	18	19	20	21	22	23
15	16	17	18	19	20	21	22
14	15	16	17	18	19	20	21
13	14	15	16	17	18	19	20
12	13	14	15	16	17	18	19
11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17

Рис. 6.

8.1. В секции го 50 ребят разного рейтинга. Ребята решили сыграть турнир, каждый с каждым по одной партии. Чтобы было интереснее, некоторым ребятам было разрешено ровно один раз за турнир воспользоваться помощью компьютера. Если в партии встречаются ребята, один из которых пользуется помощью компьютера, а другой нет, то побеждает пользующийся компьютером; иначе побеждает более высокий по рейтингу. Ничьих в го не бывает.

По итогам турнира нашлись двое ребят, каждый из которых выиграл больше партий, чем любой из двух ребят с наибольшим рейтингом. Каким могло быть наибольшее количество ребят, не пользовавшихся компьютером?

8.2. В секции го 60 ребят разного рейтинга. Ребята решили сыграть турнир, каждый с каждым по одной партии. Чтобы было интереснее, некоторым ребятам было разрешено ровно один раз за турнир воспользоваться помощью компьютера. Если в партии встречаются ребята, один из которых пользуется помощью компьютера, а другой нет, то побеждает пользующийся компьютером; иначе побеждает более высокий по рейтингу. Ничьих в го не бывает.

По итогам турнира нашлись двое ребят, каждый из которых выиграл больше партий, чем любой из двух ребят с наибольшим рейтингом. Каким могло быть наибольшее количество ребят, не пользовавшихся компьютером?

8.3. В секции го 40 ребят разного рейтинга. Ребята решили сыграть турнир, каждый с каждым по одной партии. Чтобы было интереснее, некоторым ребятам было разрешено ровно один раз за турнир воспользоваться помощью компьютера. Если в партии встречаются ребята, один из которых пользуется помощью компьютера, а другой нет, то побеждает пользующийся компьютером; иначе побеждает более высокий по рейтингу. Ничьих в го не бывает.

По итогам турнира нашлись двое ребят, каждый из которых выиграл больше партий, чем любой из двух ребят с наибольшим рейтингом. Каким могло быть наибольшее количество ребят, не пользовавшихся компьютером?

8.4. В секции го 55 ребят разного рейтинга. Ребята решили сыграть турнир, каждый с каждым по одной партии. Чтобы было интереснее, некоторым ребятам было разрешено ровно один раз за турнир воспользоваться помощью компьютера. Если в партии встречаются ребята, один из которых пользуется помощью компьютера, а другой нет, то побеждает пользующийся компьютером; иначе побеждает более высокий по рейтингу. Ничьих в го не бывает.

По итогам турнира нашлись двое ребят, каждый из которых выиграл больше партий, чем любой из двух ребят с наибольшим рейтингом. Каким могло быть наибольшее количество ребят, не пользовавшихся компьютером?

Ответ, вариант 1. 45 игроков.

Ответ, вариант 2. 55 игроков.

Ответ, вариант 3. 35 игроков.

Ответ, вариант 4. 50 игроков.

Решение варианта 1. Занумеруем игроков в порядке убывания их силы от первого до пятидесятого.

Будем считать, что каждая выигранная партия приносит игроку одно очко. Рассмотрим двух игроков, которые в итоге набрали больше очков, чем двое сильнейших участников. Ясно, что номер одного из них не меньше чем 4. Если он не пользовался компьютером, то мог выиграть не более чем у 46 игроков. Следовательно, даже при помощи компьютера он мог набрать не более 47 очков. Значит, каждый из двух сильнейших игроков набрал не более 46 очков. Если бы никто не пользовался компьютером, двое сильнейших набрали бы 49 и 48 очков. Таким образом, из-за компьютера они должны были потерять хотя бы 3 и 2 очка соответственно. Следовательно, компьютер использовался не менее $3+2=5$ раз, то есть без него играли не более 45 ребят.

Приведем пример, показывающий, могло быть 5 ребят, пользовавшихся компьютером. Пусть игроки с 3-го по 7-го пользовались компьютером: трое из них выиграли у 1-го игрока, и двое — у 2-го. Двое сильнейших игроков выиграют по 46 игр, а 3-ий и 4-ый игроки набрали по 48 и 47 очков соответственно.