

Муниципальный этап областной олимпиады школьников
по математике
2020–2021 учебный год

9 класс

1. Парабола $y = x^2 - 20x + c$, где $c \neq 0$, пересекает ось Ox в точках A и B , а ось Oy в точке C . Известно, что точки A и C симметричны относительно прямой $y = -x$. Найдите площадь треугольника ABC .

2. Найдите все пары натуральных чисел n и m , для которых

$$(n + 1)(2n + 1) = 18m^2.$$

3. ABC — треугольник. Точка Q — середина стороны AC , а на отрезке AB отмечена точка P , при этом $AP = 2PB$. Оказалось, что $CP = 2PQ$. Докажите, что угол ABC прямой.

4. Пусть a, b, c — стороны треугольника, $p + q = 1$. Докажите, что

$$pa^2 + qb^2 > pqc.$$

5. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — положительные числа, $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{6a_1 + 1} + \sqrt{6a_2 + 1} + \dots + \sqrt{6a_n + 1} < n + 3.$$