

Ленинградская область  
Всероссийская олимпиада школьников по математике  
Муниципальный этап  
2020-2021 уч.год  
9 класс

1. В магазин привезли новую серию "Киндер-сюрпризов" – шоколадных яиц, в каждом из которых находится одна игрушечная машинка. Продавец сказал Пете, что в новой серии всего пять различных видов машинок, и по внешнему виду невозможно определить, какая машинка внутри. Какое минимальное количество "Киндер-сюрпризов" должен купить Петя, чтобы гарантированно иметь три машинки одного, неважно какого, вида?
2. Докажите неравенство для любых вещественных  $a, b, c$

$$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4bc + 4ac$$

При каких  $a, b, c$  выполняется равенство?

3. Четырехугольник  $ABCD$  описан вокруг окружности. Вершины  $A, B, C, D$  являются центрами окружностей  $S_1, S_2, S_3, S_4$  соответственно. Окружности  $S_1$  и  $S_2$  касаются внешним образом в точке  $X$ , аналогично  $S_2$  и  $S_3$  касаются в точке  $Y$ ,  $S_3$  и  $S_4$  – в точке  $Z$ ,  $S_4$  и  $S_1$  – в точке  $V$ . Докажите, что существует окружность, описанная вокруг четырехугольника  $XYZV$ .
4. Пусть  $S$  – сумма цифр некоторого пятизначного числа, все цифры которого разные и ненулевые. Выписали все пятизначные числа, полученные перестановкой цифр исходного числа, а затем все выписанные числа, включая и исходное число, сложили. Докажите, что полученная сумма делится на  $S$ .
5. Таблица  $3 \times 3$  первоначально заполнена ноликами. За один ход в таблице выбирается любой квадрат  $2 \times 2$ , и в нем все нолики заменяются на крестики, а все крестики – на нолики. Назовем "рисунком" любое расположение крестиков и ноликов в таблице. Сколько различных рисунков можно получить в результате выполнения таких ходов? Рисунки, получающиеся один из другого в результате поворота на  $90^\circ$  или  $180^\circ$  градусов, считаем разными.

*Продолжительность выполнения заданий – 4 астрономических часа (240 минут).*

*Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.*