Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ по математике
2020-2021 учебный год
9 класс

1. 1.1. Онлайн-сервис проката электросамокатов взимает фиксированную сумму за поездку и определенную сумму за каждую минуту аренды. Катя заплатила 78 рублей за поездку продолжительностью 3 минуты. Лена заплатила 108 рублей за поездку продолжительностью 8 минут. От дома до работы Коле ехать 5 минут. Сколько он заплатит за эту поездку?

   Ответ: 90.

   Решение.

   1 способ. Если аренда самоката стоит x рублей, а минута использования y рублей, то $x + 3y = 78$, а $x + 8y = 108$. Решая эту систему, получим, что $y = 6$, $x = 60$. Тогда Коля заплатит 60+30=90 рублей.

   2 способ. Заметим, что поездка Лены дороже поездки Кати на 30 рублей и длится на 5 минут больше. Получается, что 1 минута без учета стоимости аренды стоит 30:5=6 рублей. Тогда, так как Катя заплатила 78 рублей за 3 минуты, то $78 - 3 \times 6 = 60$ рублей. Значит, Коля заплатил 60+30=90 рублей.

   1.2 Онлайн-сервис проката электросамокатов взимает фиксированную сумму за поездку и определенную сумму за каждую минуту аренды. Катя заплатила 88 рублей за поездку продолжительностью 3 минуты. Лена заплатила 118 рублей за поездку продолжительностью 8 минут. От дома до работы Коле ехать 5 минут. Сколько он заплатит за эту поездку?

   Ответ: 100.

   1.3 Онлайн-сервис проката электросамокатов взимает фиксированную сумму за поездку и определенную сумму за каждую минуту аренды. Катя заплатила 52 рублей за поездку продолжительностью 3 минуты. Лена заплатила 72 рублей за поездку продолжительностью 8 минут. От дома до работы Коле ехать 5 минут. Сколько он заплатит за эту поездку?

   Ответ: 60.

   1.4 Онлайн-сервис проката электросамокатов взимает фиксированную сумму за поездку и определенную сумму за каждую минуту аренды. Катя заплатила 63 рублей за поездку продолжительностью 3 минуты. Лена заплатила 93 рублей за поездку продолжительностью 8 минут. От дома до работы Коле ехать 5 минут. Сколько он заплатит за эту поездку?

   Ответ: 75.

2. 2.1. Дилер Дима купил у производителя автомобиль «LADA Kalina» и поднял его цену на $A\%$. Спроса не было, и Диме пришлось продать авто на распродаже с 20%-ной скидкой. В результате, его прибыль составила 20%. Найдите A.

   Ответ: 50.

   Решение.

   1 способ. Пусть Дима купил автомобиль у производителя за X рублей. После того, как он поднял цену, автомобиль стал стоить $X(1 + A/100)$ рублей. После снижения цены на 20% автомобиль стал стоить $0.8X(1+A/100)$. При этом, из условия следует, что это тоже самое, что $1.2X$. Тогда $1 + A/100 = 1.2/0.8$, значит, $A = 50$.

   2 способ. После повышения на A% цена увеличилась в $(1+A/100)$ раз. После снижения на 20% цена умножается на 0.8 и станет равна 1.2 от закупочной. Тогда, $(1+A/100)\cdot 0.8 = 1.2$. Значит, $1 + A/100 = 1.2 : 0.8 = 1.5$, откуда $= 50$.

   2.2. Дилер Дима купил у производителя автомобиль "LADA Kalina"и поднял его цену на 60%. Спроса не было, и Диме пришлось продать авто на распродаже со скидкой A%. В результате, его прибыль составила 20%. Найдите A.

   Ответ: 25.

   2.3. Дилер Дима купил у производителя автомобиль "LADA Kalina"и поднял его цену на A%. Спроса не было, и Диме пришлось продать авто на распродаже с 40%-ной скидкой. В результате, его прибыль составила 20%. Найдите A.

   Ответ: 100.

   2.4. Дилер Дима купил у производителя автомобиль "LADA Kalina"и поднял его цену на 50%. Спроса не было, и Диме пришлось продать авто на распродаже со скидкой A%. В результате, его прибыль составила 20%. Найдите A.

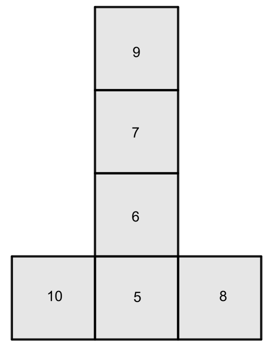
   Ответ: 20.

3. 3.1. Петя отметил на грани кубика 5 точек, повернул и на соседней грани отметил 6 точек, потом еще раз повернул и отметил 7 точки и так далее. Так он отметил точки на каждой грани. Какое наибольшее количество точек может быть суммарно на двух противоположных гранях?

   Ответ: 18.

   Решение.

   Так как у кубика всего 6 граней, значит наибольшее количество точек, которые отметил Петя, равно 10. Тогда число 9 будет находиться на соседней с числом 10 грани и никак не может быть на противоположной. Значит, максимальная сумма будет не больше 18. Сумму 18 можно, например, получить так:



3.2. Петя отметил на грани кубика 6 точек, повернул и на соседней грани отметил 7 точек, потом еще раз повернул и отметил 8 точек и так далее. Так он отметил точки на каждой грани. Какое наибольшее количество точек может быть суммарно на двух противоположных гранях?

Ответ: 20.

4. 4.1. Для квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$, выполняется условие $|f(1)| = |f(2)| = |f(3)| = 1$. Чему могут равняться его коэффициенты?

Ответ: $a = 2, b = -8, c = 7$ или $a = 1, b = -3, c = 1$ или $a = 1, b = -5, c = 5$.

Решение.

Заметим, что квадратный трехчлен может принимать одинаковые значения не более чем в двух различных точках. Поэтому числа $f(1), f(2), f(3)$ не могут быть одного знака. Тогда ровно два из этих чисел принимают одинаковые значения. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c принимает одинаковые значения в различных точках, то эти точки симметричны относительно $x = \frac{-b}{2a}$ – оси симметрии параболы. Таким образом, возможно 3 случая расположения оси симметрии: $x = 2, x = 1.5, x = 2.5$ В силу того, что ветви параболы направлены вверх, возможны только следующие 3 случая: 1) $f(1) = 1, f(2) = -1, f(3) = 1$, 2) $f(1) = -1, f(2) = -1, f(3) = 1$, 3) $f(1) = 1, f(2) = -1, f(3) = -1$. Рассмотрение каждого случая сводится к решению системы из 3-х уравнений.

4.2. Для квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$ выполняется условие $|f(1)| = |f(2)| = |f(3)| = 2$. Чему могут равняться его коэффициенты?

Ответ: $a = 4, b = -16, c = 14$ или $a = 2, b = -6, c = 2$ или $a = 2, b = -10, c = 10$.

4.3. Для квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$ выполняется условие $|f(1)| = |f(2)| = |f(3)| = 3$. Чему могут равняться его коэффициенты?

Ответ: $a = 6, b = -24, c = 21$ или $a = 3, b = -15, c = 15$ или $a = 3, b = -9, c = 3$

4.4. Для квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$ выполняется условие $|f(1)| = |f(2)| = |f(3)| = 4$. Чему могут равняться его коэффициенты?

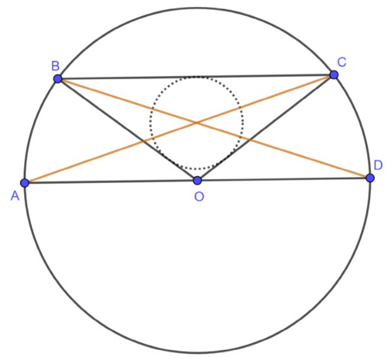
Ответ: $a = 8, b = -32, c = 28$ или $a = 4, b = -20, c = 20$ или $a = 4, b = -12, c = 4$

5. 5.1. Равнобокая трапеция $ABCD$ вписана в окружность с диаметром AD и центром в точке O. В треугольник BOC вписана окружность с центром в точке I. Найдите отношение площадей треугольников AID и BIC, если известно, что $AD = 15$, $BC = 5$.

Ответ: 9.

Решение.

Из того, что AD – диаметр окружности, описанной около трапеции, следует $AO = BO = CO = DO$ как радиусы. Значит, треугольник BOD – равнобедренный. Откуда, $\angle OBD = \angle ODB = \angle DBC$ (последнее – из $AD||BC$). Тогда BD – биссектриса угла OBC. Аналогично AC – биссектриса угла OCB. Значит, поскольку центр вписанной в треугольник BOC окружности совпадает с точкой пересечения биссектрис, имеем: $I = AC \cap BD$. Далее, в силу подобия AID и BIC имеем, что площади относятся как квадрат коэффициента подобия: $(\frac{AD}{BC})^2 = (\frac{15}{5})^2 = 9$.



5.2. Равнобокая трапеция $ABCD$ вписана в окружность с диаметром AD и центром в точке O. В треугольник BOC вписана окружность с центром в точке I. Найдите отношение площадей треугольников AID и BIC, если известно, что $AD = 27$, $BC = 3$.

Ответ: 81.

5.3. Равнобокая трапеция $ABCD$ вписана в окружность с диаметром AD и центром в точке O. В треугольник BOC вписана окружность с центром в точке I. Найдите отношение площадей треугольников AID и BIC, если известно, что $AD = 45$, $BC = 9$.

Ответ: 25.

5.4. Равнобокая трапеция $ABCD$ вписана в окружность с диаметром AD и центром в точке O. В треугольник BOC вписана окружность с центром в точке I. Найдите отношение площадей треугольников AID и BIC, если известно, что $AD = 56$, $BC = 8$.

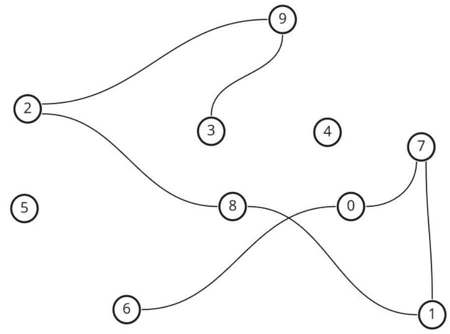
Ответ: 49.

6. Найдите наибольшее натуральное число, в котором все цифры различны и каждые две соседние отличаются на 6 или 7.

Ответ: 60718293.

Решение.

Сопоставим каждой цифре от 0 до 9 вершину графа и соединим вершины ребром, если соответствующие им цифры отличаются на 6 или 7.



Мы видим, что вершины, соответствующие цифрам 4 и 5, ни с чем не соединены, поэтому максимальное число, которое можно получить, будет 8-значным. Вершины, соответствующие цифрам 3 и 6, могут быть только первыми или последними в числе. Так как требуется найти максимальное число, то оно определяется однозначно, двигаясь по ребрам графа, и будет равно 60718293.

7. Найдите наименьшее целое положительное число n такое, что $A_n = 1+11+111+...+1...1$ (последнее слагаемое содержит n единиц) делится на 45.

   Ответ: 35.

   Решение.

   Чтобы сумма A_n делилась на 45, нужно, чтобы она делилась на 5 и на 9. По признаку делимости на 5 получаем, что n должно быть кратно 5. Так как любое натуральное число дает такой же остаток при делении на 9, как и сумма его цифр, то A_n дает такой же остаток при делении на 9 как и сумма $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Так как 9 и 2 не имеют общих делителей, то $n(n+1)$ должно делиться на 9. Два последовательных натуральных числа не могут одновременно делиться на 3, значит либо n, либо $n+1$ делится на 9. Далее рассмотрим числа n, кратные 5, чтобы либо n, либо $n+1$ делилось на 9 (очевидно, что $n \leq 45$).

n	5	10	15	20	25	30	35
n+1	6	11	16	21	26	31	36

   Из таблицы видим, что минимальным числом будет $n = 35$.

   7.2. Найдите наименьшее целое положительное число n, такое что $A_n = 2 + 22 + 222 + ... + 2..2$ (последнее слагаемое содержит n двоек) делится на 45.

   Ответ: 35.

   7.3. Найдите наименьшее целое положительное число n, такое что $A_n = 7 + 77 + 777 + ... + 7..7$ (последнее слагаемое содержит n семерок) делится на 45.

   Ответ: 35.

   7.4. Найдите наименьшее целое положительное число n, такое что $A_n = 4 + 44 + 444 + ... + 4..4$ (последнее слагаемое содержит n четверок) делится на 45.

   Ответ: 35.

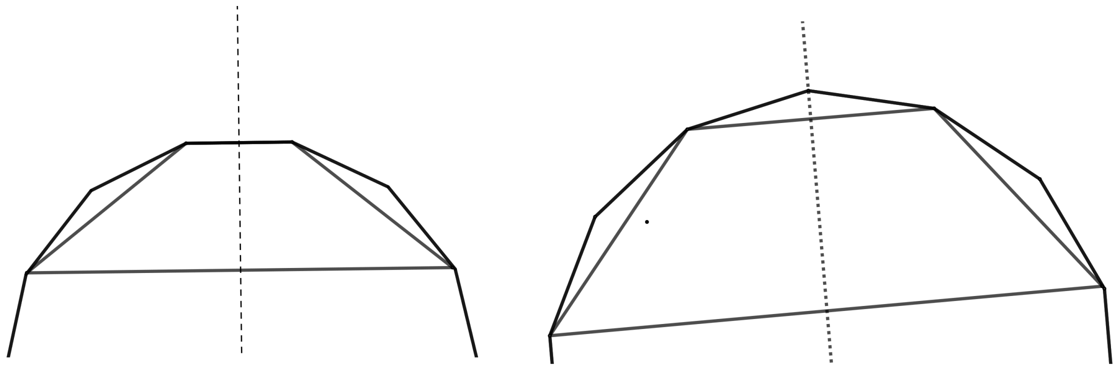
8. 8.1. Вершины правильного двадцатидвухугольника пронумерованы. Сколькими способами можно выбрать четыре его вершины, образующие трапецию? (Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие – не параллельны).

Ответ: 990.

Решение.

Заметим, что все трапеции, которые мы получим, будут равнобокими. Будем считать количество вписанных четырехугольников, имеющих ось симметрии, не проходящую через вершины. Таким образом, мы подсчитаем все трапеции по одному разу (ведь, каждая равнобокая трапеция имеет только одну ось симметрии), и дважды подсчитаем каждый прямоугольник (т.к. у него две таких оси симметрии).

Рассматриваемая ось симметрии может содержать вершины многоугольника, а может не содержать см. рисунок.



Теперь подсчитаем количество описанных выше четырехугольников в $2n-$угольнике. 1) Рассмотрим ось симметрии, проходящую через середину стороны $2n-$угольника. Таких осей можно провести ровно n. Выбор любых двух точек по одну сторону от оси симметрии однозначно определяет наш четырехугольник. Число способов выбора двух точек из n: $C_n^2 = n(n-1)/2$. Таким образом, в этом случае мы насчитали $n^2(n-1)/2$ четырехугольников. 2) Если ось симметрии проходит через две вершины многоугольника, то таких осей снова n. Выбор любых двух точек по одну сторону от оси симметрии также однозначно определяет наш четырехугольник, но таких точек теперь по $n-1$ с каждой стороны от оси. Число способов выбора двух точек из $n-1$: $C_{n-1}^2 = (n-1)(n-2)/2$. Таким образом, в этом случае у нас $n(n-1)(n-2)/2$ четырехугольников. Осталось вычесть удвоенное количество прямоугольников, и мы получим ответ. Каждый прямоугольник однозначно определяется двумя диаметрами окружности. Значит их удвоенное количество: $2C_n^2 = n(n-1)$. Таким образом, окончательно получим $n^2(n-1)/2 + n(n-1)(n-2)/2 - 2n(n-1)/2 = n(n-1)(n-2)$. В случае двадцатидвухугольника $n = 11$ и число способов выбора трапеции будет равно $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$.

8.2. Вершины правильного тридцатиугольника пронумерованы. Сколькими способами можно выбрать четыре его вершины, образующие трапецию? (Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие - не параллельны).

Ответ: 2730.

8.3. Пронумерованные 26 точек делят окружность на 26 равных дуг. Сколькими способами можно выбрать четвёрку точек, являющихся вершинами трапеции? (Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие - не параллельны).

Ответ: 1716.

8.4. Пронумерованные 34 точки делят окружность на 34 равных дуги. Сколькими способами можно выбрать четвёрку точек, являющихся вершинами трапеции? (Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие - не параллельны).

Ответ: 4080.