ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2021-2022 УЧЕБНЫЙ ГОД

МОСКОВСКАЯ ОБЛАСТЬ МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители: Н.Х. Агаханов., О.К. Подлипский.
Задачи 6.2, 7.2 предложены Е.В. Бакаевым, 6.4. – О.Н. Агахановой, 9.4, 10.3 – С.Е. Бойченко, 9.5 – А.Д. Терёшиным. Задача 11.5 составлена по мотивам задачи №6 Международной математической олимпиады 2021.

Принципы оценивания

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

11 класс

11.1 Из трехзначного числа A, не содержащего в записи нулей, получили двузначное число B, записав вместо первых двух цифр их сумму (например, число 243 превращается в 63). Найдите A если известно, что $A = 3B$.

Ответ. 135.

Решение. Последняя цифра у чисел B и $A = 3B$ одинакова, поэтому это цифра 5. Кроме того, A делится на 3, значит, B делится на 3 (одинаковые суммы цифр). То есть B — это одно из чисел 15, 45, 75. Проверкой получаем, что условию удовлетворяет число $B = 45$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 2 балла.

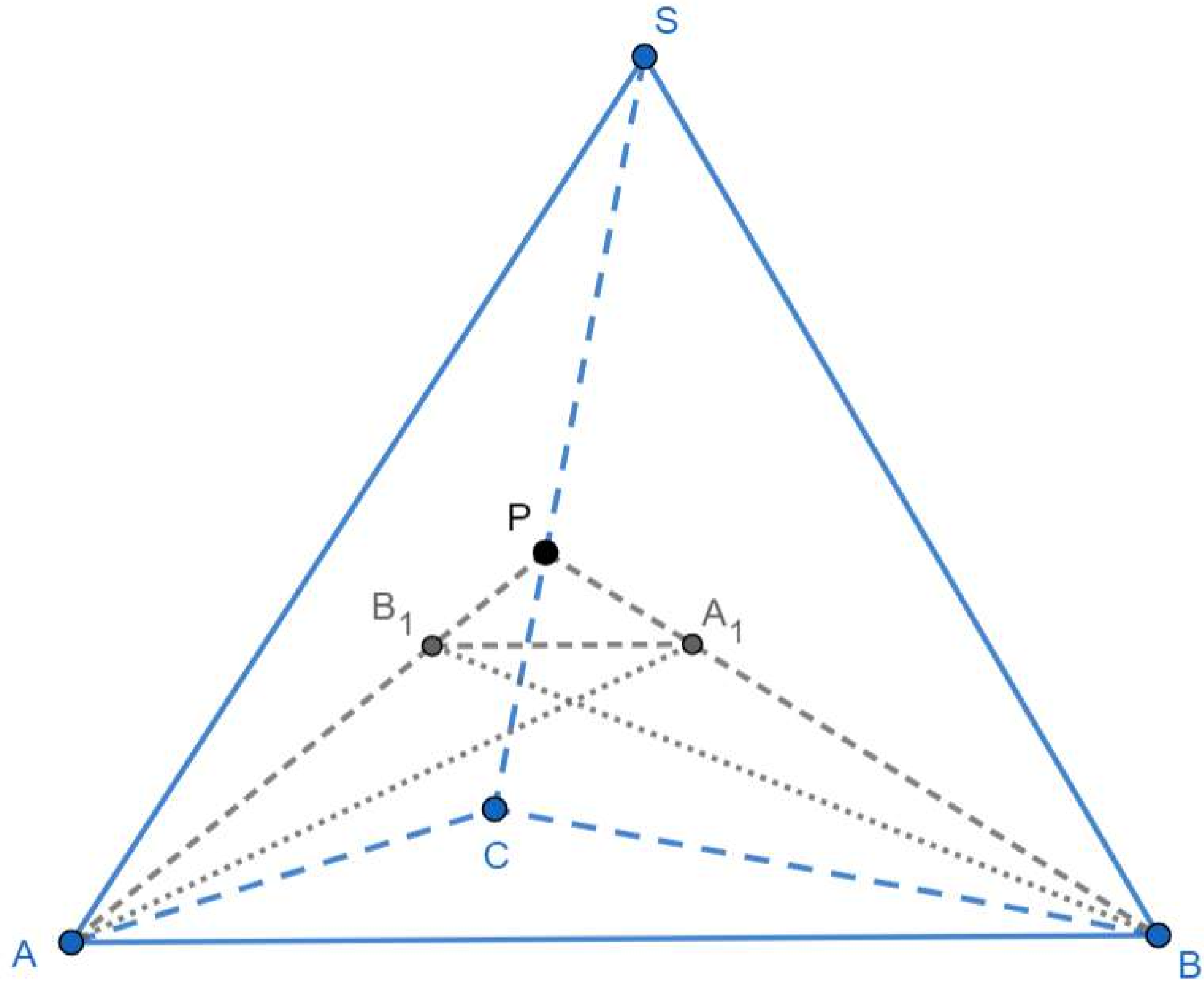
11.2. Для числа x выполняются неравенства $\sin x < \cos\frac{x}{2} < 0$. Докажите, что $\cos x < \frac{1}{2}$.

Решение. Разделив данное неравенство на отрицательное число $\cos\frac{x}{2}$, получаем, что $\sin\frac{x}{2} > \frac{1}{2}$. Значит, $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{1}{2}$.

Комментарий. Неэквивалентное преобразование неравенства — 0 баллов за задачу.

11.3. В треугольной пирамиде $SABC$ проведены высоты AA_1 и BB_1. Известно, что отрезок A_1B_1 параллелен ребру AB. Докажите, что некоторые две грани пирамиды имеют одинаковые площади.

Решение. Из параллельности данных отрезков следует, что они лежат в одной плоскости. Тогда в этой же плоскости лежат высоты AA_1 и BB_1 пирамиды. Пусть P – точка пересечения этой плоскости с ребром SC. Прямая AA_1 перпендикулярна плоскости BSC, поэтому прямая AA_1 перпендикулярна прямой SC. Аналогично прямые BB_1 и SC – перпендикулярны. Но тогда прямая SC перпендикулярна плоскости APB, в частности, она перпендикулярна прямым AP и BP. Отрезки AA_1 и BB_1 – высоты в треугольнике APB. Докажем, что он равнобедренный. Точки A_1 и B_1 лежат на окружности с диаметром AB на равных расстояниях от этого диаметра (из параллельности), поэтому треугольники AA_1B и BB_1A симметричны относительно серединного перпендикуляра к диаметру AB, и потому углы B_1AB и A_1BA равны. То есть треугольник APB — равнобедренный, и $AP = BP$. Но тогда площади треугольников CBS и CAS равны, так как они имеют общее основание SC.



11.4. Прямые $l: y = kx + b$, $l_1 : y = k_1x + b_1$ и $l_2 : y = k_2x + b_2$ касаются гиперболы $y = \frac{1}{x}$. Известно, что $b = b_1 + b_2$. Докажите, что $k \geq 2(k_1 + k_2)$.

Решение. Условие касания означает, что уравнение $\frac{1}{x} = kx+b$, то есть $kx^2+bx-1 = 0$ (и два аналогичных) имеет единственное решение, а это равносильно равенству нулю дискриминанта: $b^2+4k = 0$. Тогда $k = -\frac{1}{4}b^2$, аналогично $k_1 = -\frac{1}{4}b_1^2$, $k_2 = -\frac{1}{4}b_2^2$. Следовательно, $k \geq 2(k_1+k_2)$, что верно в силу неравенства $-\frac{1}{4}(b_1+b_2)^2 \geq 2(-\frac{1}{4}b_1^2 - \frac{1}{4}b_2^2)$, равносильного неравенству $(b_1 - b_2)^2 \geq 0$.

11.5. Дано натуральное число $K > 2$ и набор из N карточек, на которых написаны положительные числа. Оказалось, что из них можно выбрать несколько карточек (возможно, одну) с суммой чисел K, несколько карточек с суммой чисел K^2, ..., несколько карточек с суммой чисел K^K. Могло ли оказаться, что $N < K$?

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что $N < K$. Рассмотрим карточки, которые в сумме дают K^K. Так как их не больше, чем N, то на одной из карточек написано число не меньше чем $K^K/N > K^K/K = K^{K-1}$. Значит, есть карточка, на которой написано число, большее чем K^{K-1}. Эта карточка не может участвовать в суммах с K по

K^{K-1}. Рассмотрев карточки с суммой K^{K-1}, можно показать, что есть карточка, число на которой больше K^{K-2}, но не больше K^{K-1}. Рассуждая аналогично, мы найдем карточку, число на которой больше K^{K-3}, но не больше K^{K-2}, $\ldots$, карточку, число на которой не больше K. То есть мы найдем K различных карточек, что противоречит нашему предположению.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.