11 класс

11.1. (*7 баллов*)

Проверьте истинность неравенства $\frac{1}{log_{\pi}2}+\frac{1}{log_2\pi}>2.$

Решение: $log_2\pi+\frac{1}{log_2\pi}>2,$

$$\frac{log_2^2\pi+1}{log_2\pi}>2, log_2\pi>0,$$

$$log_2^2\pi+1>2\,log_2\pi,$$

$$log_2^2\pi-2\,log_2\pi+1\quad>0,$$

$$(log_2\pi-1)^2>0.$$

Данное неравенство верно.

11.2. (*7 баллов*)

Мастер делает за один час целое число деталей, большее 5, а ученик — на 2 деталей меньше. Мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе — на час быстрее. Из какого числа деталей состоит заказ?

Ответ: 24.

Решение: пусть x – количество деталей заказа; y (деталей в час) – производительность мастера (y > 5); y - 2 (деталей в час) – производительность ученика; $2y$ - 4 (деталей в час) – производительность двух учеников.

Тогда $\frac{x}{y}$ – время выполнения заказа мастером, $\frac{x}{2y-4}$ – время выполнения заказа учениками.

По условию $\frac{x}{y}=\frac{x}{2y-4}+1.$

Выразив x из данного уравнения, получим: $x=\frac{2y^2-4y}{y-4}, \frac{x}{y}=\frac{2y-4}{y-4}.$

Рассмотрим $2y-4=2y-8+4=2(y-4)+4.$

Тогда $\frac{x}{y}=\frac{2(y-4)+4}{y-4}=2+\frac{4}{y-4}.$

По условию $\frac{x}{y}\in Z, 2\in Z.$ Следовательно, $\frac{4}{y-4}\in Z.$

y > 5, тогда y – 4 = 2, y = 6 и y – 4 = 4, y = 8.

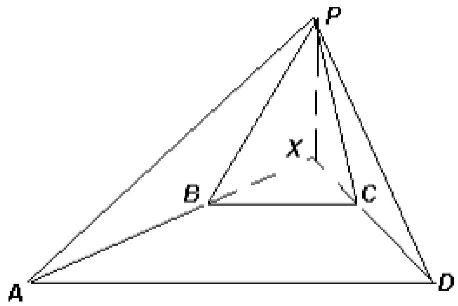
Найдём x: $\frac{x}{6} = 4, x = 24$ или : $\frac{x}{8} = 3, x = 24$.

11.3. (*7 баллов*)

Основанием пирамиды с вершиной *P* является четырёхугольник *ABCD*, у которого сумма углов *A* и *D* в пять раз меньше суммы углов *B* и *C*. Найдите угол между плоскостями граней *PAB* и *PCD*, если они обе перпендикулярны основанию.

Ответ: 60^0.

Решение: пусть плоскости *APB* и *CPD* пересекаются по прямой *PX* (точка *X* лежит в плоскости *ABC*, см. рисунок).



Так как $(APB)\perp(ABC)$ и $(CPD)\perp(ABC)$, то $PX\perp(ABC)$. Тогда угол *BXC* – линейный угол двугранного угла с ребром *PX*. Из условия задачи следует, что в четырёхугольнике *ABCD* сумма углов *A* и *D* равна 60°, значит, $\angle BXC = 120°$. Полученный угол – тупой, поэтому угол между указанными плоскостями равен 60°.

11.4. (*7 баллов*)

Решите уравнение $\left(\sqrt[5]{7+4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt[5]{7-4\sqrt{3}}\right)^x = 194$.

Ответ: -10; 10.

Решение: $\left(\sqrt[5]{\frac{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}{7-4\sqrt{3}}}\right)^x + \left(\sqrt[5]{7-4\sqrt{3}}\right)^x = 194,$

$\frac{1}{\left(\sqrt[5]{7-4\sqrt{3}}\right)^x} + \left(\sqrt[5]{7-4\sqrt{3}}\right)^x = 194,$

Пусть $\left(\sqrt[5]{7-4\sqrt{3}}\right)^x = $ t, тогда $\frac{1}{t} + t = 194.$

$$t^2 - 194t + 1 = 0, t_{1,2} = \left(7 \pm 4\sqrt{3}\right)^2.$$

Следовательно, $\left(\sqrt[5]{7-4\sqrt{3}}\right)^x = \left(7 \pm 4\sqrt{3}\right)^2.$

1) $\left(\sqrt[5]{7-4\sqrt{3}}\right)^{x}=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2}, x=-10.$

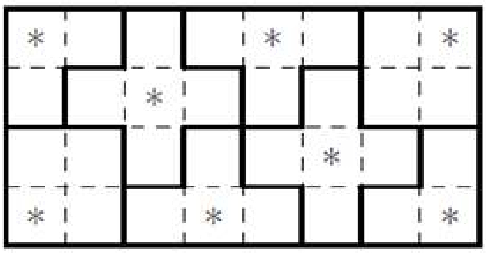
2) $\left(\sqrt[5]{7-4\sqrt{3}}\right)^{x}=\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2}, x=10.$

11.5. (*7 баллов*)

На совместной конференции партий лжецов и правдолюбов в президиум было избрано 32 человека, которых рассадили в четыре ряда по 8 человек. В перерыве каждый член президиума заявил, что среди его соседей есть представители обеих партий. Известно, что лжецы всегда лгут, а правдолюбы всегда говорят правду. При каком наименьшем числе лжецов в президиуме возможна описанная ситуация? (Два члена президиума являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого).

Ответ: при восьми лжецах.

Решение: Разобьем все места в президиуме на восемь групп так, как показано на рисунке. Если лжецов меньше восьми, то в какой-то из этих групп сидят одни правдолюбы, чего быть не может. Полученное противоречие показывает, что лжецов не меньше восьми. На рисунке показано, как можно рассадить в президиуме восемь лжецов так, чтобы выполнялось условие задачи.



	Л				Л		
			Л				Л
Л				Л			
		Л				Л	

Комментарии. *При отсутствии примера рассадки лжецов – 5 баллов*.