11 класс

11.1. В шестизначном числе первую цифру, равную 2, переставили на последнее место, оставив остальные цифры в том же порядке. Получившиеся число оказалось в три раза больше исходного. Найдите исходное число.

Ответ. 285714.

Решение. Согласно условию, искомое число имеет вид $\overline{2abcde}$, тогда имеем: $\overline{abcde2} = 3\cdot\overline{2abcde}$, или $\overline{abcde}\cdot 10 + 2 = 3\cdot\left(200000 + \overline{abcde}\right)$. Пусть $\overline{abcde} = X$ – пятизначное число, тогда $10X + 2 = 3\cdot(200000 + X)$, или $7X = 600000 - 2, X = 86714$, тогда исходное число будет равно $\overline{2abcde} = \overline{2X} = 285714$.

11.2. Доказать, что уравнение $x^2 + y^2 = 2018^{2021}$ разрешимо в натуральных числах.

Решение. Решением является, например, $(2018^{1010}\cdot 13;\ 2018^{1010}\cdot 43)$

11.3. На одной главной диагонали и всех рёбрах куба выбраны направления. Какую наименьшую длину может иметь сумма получившихся 13 векторов, если длина ребра равна 1, а длина главной диагонали $\sqrt{3}$.

Ответ. $\sqrt{3}$

Решение. Выберем базис из трёх векторов, идущих по ребрам куба, так, чтобы вектор диагонали равнялся $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$. Тогда четыре вектора будут равны $\pm\overrightarrow{e_1}$, ещё четыре $\pm\overrightarrow{e_2}$, ещё четыре $\pm\overrightarrow{e_3}$. Таким образом, сумма $\vec{S}$ векторов имеет вид $k\cdot\overrightarrow{e_1} + m\cdot\overrightarrow{e_2} + n\cdot\overrightarrow{e_3}$, где k, m и n – целые нечетные числа, а $\left|\vec{S}\right| = \sqrt{k^2 + m^2 + n^2} \geq \sqrt{3}$, так как $k^2 \geq 1, m^2 \geq 1, n^2 \geq 1$. Очевидно, что, разбив пары параллельных рёбер куба на противоположно направленные векторы, мы получим, что $k = m = n = 1$ и $\left|\vec{S}\right| = \sqrt{3}$.

11.4. Для каждого целого значения x многочлен $P(x)$ принимает целые значения. Может ли один из его коэффициентов быть равен $\frac{1}{2021}$?

Ответ. Да, может.

Решение. Рассмотрим, например, многочлен $P(x) = \frac{1}{2021}(x+1)(x+2)\cdot\dots\cdot(x+2021)$, старший коэффициент которого равен $\frac{1}{2021}$. При любом целом значении x произведение $(x+1)(x+2)\cdot\dots\cdot(x+2021)$ кратно 2021, так как одно из 2021 последовательных целых чисел кратно 2021. Следовательно, $P(x)$ принимает целые значения.

11.5. Шахматный турнир прошёл по круговой системе, где каждый участник сыграл с каждым один раз. Назовём партию неправильной, если выигравший её шахматист в итоге набрал очков меньше, чем проигравший. (Победа даёт 1 очко, ничья – ½, поражение – 0). Могут ли неправильные партии составлять более 75% от общего количества партий в турнире?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть N – число игроков, $M = [N/2]$. Игроков, занявших первые M мест, назовём сильными, а остальных – слабыми (между участниками с одинаковой суммой очков места распределяются произвольно). Пусть X – число правильных партий между сильными и слабыми. Сумма очков, набранных сильными во встречах между собой, равна $\frac{M(M-1)}{2}$, а во встречах со слабыми – не больше X. Поэтому средний результат сильного не больше $\frac{M-1}{2}+\frac{X}{M}$. Аналогично, средний результат слабого не меньше $\frac{N-M-1}{2}+\frac{M(N-M)-X}{N-M}$.

Если есть неправильные партии, то не все игроки набрали поровну, и средний результат сильного больше, чем слабого. Отсюда $X > \frac{M(N-M)}{2} \geq \frac{N(N-1)}{8}$. Так как общее число партий равно $\frac{N(N-1)}{2}$, доля правильных партий больше ¼ , то есть более 25%.

Критерии и методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

На олимпиаде должна использоваться 7-балльная шкала: каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6 – 7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5 – 6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2 – 3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0 – 1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов зато, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи.