Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
2021– 2022 учебный год

Математика

11 класс

Участникам муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике в 2021 – 2022 учебном году предлагается решить **5 задач**.

Задания составлены с учетом школьной программы по принципу «накопленного итога». Они включают как задачи, связанные с теми разделами школьного курса математики, которые изучаются в текущем году, так и задачи по пройденным ранее разделам. Решения задач помимо знания участниками стандартной школьной программы по математике (алгоритмы, теоремы) предполагают владение навыками построения логических конструкций, доказательства цепочек математических утверждений.

Полное верное решение каждой задачи оценивается в **7 баллов**.

Максимальная сумма баллов за решение пяти задач олимпиады составляет **35 баллов**.

Требования к проверке работ:

1) Олимпиада не является контрольной работой и недопустимо снижение оценок по задачам за неаккуратно записанные решения, исправления в работе. В то же время обязательным является снижение оценок за математические, особенно логические ошибки;

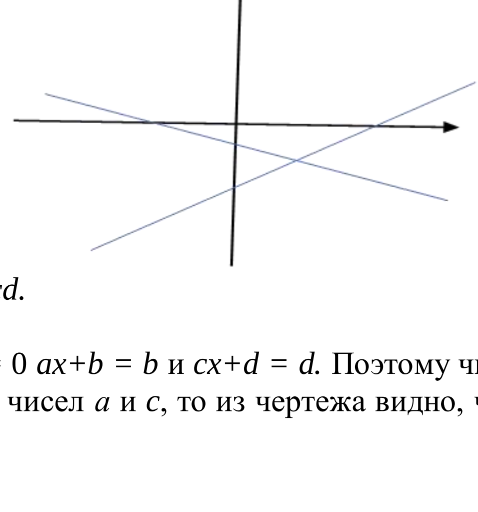
2) Стандартная методика оценивания:

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения.**
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

В комментариях к отдельным задачам, в приведенных ответах и решениях к задачам олимпиады, указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Ответы и решения

11.1. На рисунке изображены графики функций $y = ax+b$ и $y = cx+d$.



Найдите знак произведения $abcd$.

Ответ: $abcd < 0$.

Решение. Заметим, что при $x = 0$ $ax+b = b$ и $cx+d = d$. Поэтому числа b и d, как видно из чертежа, отрицательны. Что же касается чисел a и c, то из чертежа видно, что одно из них положительно, а другое - отрицательно, ибо одна из данных функций с ростом x растет, а другая - убывает. Таким образом, в произведении $abcd$ один сомножитель положителен, а три - отрицательны. Значит, произведение $abcd$ отрицательно.

11.2. (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью 1. Известно, что S_{2022} — наименьшая среди всех S_n (меньше суммы первых n членов для любого другого значения n). Какие значения может принимать первый член прогрессии?
Ответ: a_1 принадлежит интервалу (-2022; -2021).
Решение. Так как разность прогрессии положительна, то прогрессия — возрастающая. Следовательно, описанная ситуация возможна тогда и только тогда, когда члены прогрессии с первого по 2022-ый — отрицательны, а начиная с 2023-ого — положительны. Таким образом, S_{2022} будет наименьшей, тогда и только тогда, когда $a_{2022} < 0$, а $a_{2023} > 0$. Отсюда получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a_1 + 2021 < 0, \\ a_1 + 2022 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \ -2022 < a_1 < -2021.$$

11.3. Петя и Вася живут в соседних домах (см. план на рисунке 1). Вася живёт в четвёртом подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи кратчайшим путём (не обязательно идущим по сторонам клеток), безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живёт Петя. (А. В. Хачатурян)

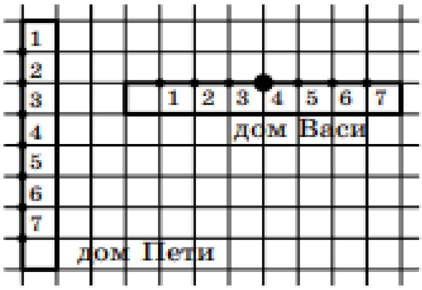


Рис.1

Ответ: в шестом подъезде.
Решение. Кратчайший путь от точки A до Васиного подъезда — отрезок AD (рис. 2). Кратчайший путь от точки B до Васиного подъезда — это путь по отрезку BC, а далее — по отрезку CD. Так как треугольники AED и CEB равны, $AD=BC$. Поэтому пути от точек A и B до Васиного подъезда отличаются на 4 клетки. Так как пути от Петиного подъезда через «верхний» угол (т. е. через точку A) и через «нижний» угол (т. е. через точку B) равны, путь от Петиного подъезда до точки A должен быть длиннее на 4 клетки, чем путь до точки B.
Значит, Петя живёт в шестом подъезде.

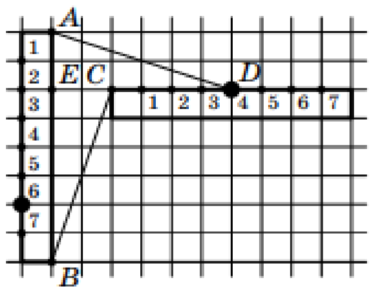


Рис.2

11.4. В произведении семи натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 13 раз? (Н. Агаханов, И. Богданов)
Ответ. Да, могло.
Решение. В качестве примера подходит произведение $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 16 = 32$. После указанной операции получается $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot 13 = 13 \cdot 32$.
Замечание 1. Укажем, как придумать этот пример. Предположим, что пять из сомножителей равнялись 1, шестой — 2, а седьмой — a. Их произведение было равно $2a$, а после уменьшения превратилось в $(-2)^5(-1)(a-3) = 32a - 96$. Значит, при $32a - 96 = 26a$ условие соблюдается. Решая это уравнение, получаем $a = 16$. Итак, числа 1, 1, 1, 1, 1, 2, 16 удовлетворяют требованиям.
Замечание 2. Приведённый пример — не единственный.

Например, подойдёт также произведение $1^4 \cdot 29 \cdot 61 \cdot 64$, после вычитания переходящий в $(-2)^4 \cdot 26 \cdot 58 \cdot 61$.
Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.
Предъявлен набор чисел, удовлетворяющий условию —7 баллов.
Во в целом правильном решении из-за арифметической ошибки получен в качестве ответа набор 1, 1, 1, 1, 1, 2, a, где значение a ошибочно — 5 баллов.

11.5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Γ с центром в точке O. Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P, причём точка O лежит внутри треугольника BPC. На отрезке BO выбрана точка H так, что $\angle BHP = 90^\circ$. Окружность ω, описанная около треугольника PHD, вторично пересекает отрезок PC в точке Q. Докажите, что $AP = CQ$. (А. Кузнецов)

Решение. Проведём в окружности Γ диаметр BT (см. рис. 1). Заметим, что $\angle PDT = \angle BDT = 90^\circ$. Значит, $\angle PHT + \angle PDT = 180^\circ$, то есть точка T лежит на окружности ω. Поэтому $\angle PQT = \angle PHT = 90^\circ$, и четырёхугольник $PQTD$ —прямоугольник.
Рассмотрим общий серединный перпендикуляр ℓ к отрезкам DT и PQ. Он проходит через O, а значит, является и серединным перпендикуляром к AC. Значит, отрезки AP и CQ симметричны относительно ℓ и потому равны.

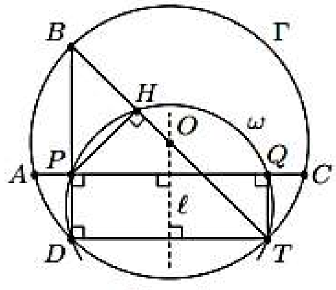


Рис. 1

Комментарий. Доказано, что описанная около треугольника PHD окружность проходит через точку T на окружности Γ, диаметрально противоположную точке B (или, эквивалентно, такую точку T на окружности Γ, что $DT \parallel AC$) — 3 балла.

Интернет-ресурсы: http://www.problems.ru, https://olimpiada.ru.