Всероссийская олимпиада школьников 2021/2022 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
11 класс

Общее время выполнения работы – 3 часа 55 мин (235 минут).
Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.
При наличии дополнительных критериев решение школьника оценивается в соответствии с ними.

Задание 11.1
При каких значениях c числа $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ являются корнями квадратного уравнения:
$10x^2 - 7x - c = 0$ (α – некоторый угол)?
Количество баллов 7
Ответ:
при $c = 2{,}55$
Решение
По теореме Виета $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}7$.
Тогда $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 0{,}49$.
Поэтому $\sin\alpha\cos\alpha = -0{,}255$.
Следовательно, $c = -10\sin\alpha\cos\alpha = 2{,}55$.
Корни полученного уравнения действительно являются синусом и косинусом некоторого угла, так как уравнение $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}7$ очевидно, имеет корни.

Задание 11.2
Известно, что среди членов некоторой арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ есть числа $a_1^2,\ \ a_2^2,\ \ a_3^2$.
Докажите, что эта прогрессия состоит из целых чисел.
Количество баллов 7

Решение
$a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = d$ – разность прогрессии.
$a_1 + a_2 = \dfrac{a_2^2 - a_1^2}{d}$ и $a_2 + a_3 = \dfrac{a_3^2 - a_2^2}{d}$ – целые числа, значит, $a_3 - a_1 = 2d$ – целое, а d – целое или полуцелое.
Поскольку $2a_1 + d = a_1 + a_2$ – целое число, возможны три случая:
a_1 и d (а значит, и все члены прогрессии) – целые;
d – целое, a_1 – полуцелое; d – полуцелое, a_1 – дробь со знаменателем 4.
Но в последних двух случаях ясно, что знаменатель каждого члена тот же, что у a_1.
С другой стороны, знаменатель a_1^2 больше, чем знаменатель a_1. Противоречие.
Дополнительные критерии
Рассмотрены не все случаи – от 3 до 5 баллов

Задание 11.3
Даны две одинаковые шестерёнки с 14 зубьями каждая. Их наложили друг на друга так, что зубья совпали (так что проекция на плоскость выглядит как одна шестерёнка). После этого четыре пары совпадающих зубьев выпилили. Всегда ли можно повернуть эти шестерёнки друг относительно друга так, чтобы проекция на плоскость выглядела как одна целая шестерёнка? (Шестерёнки можно поворачивать, но нельзя переворачивать.)
Количество баллов 7
Ответ:
Всегда
Решение
В начальном положении совпадает четыре выпиленных пары зубьев (один зуб на первой шестеренке и один – на второй). Всего таких пар 16. Значит, в одном из 13 оставшихся положений никакая пара не совпадает.
Дополнительные критерии
Предложена только идея раскраски – 2 балла

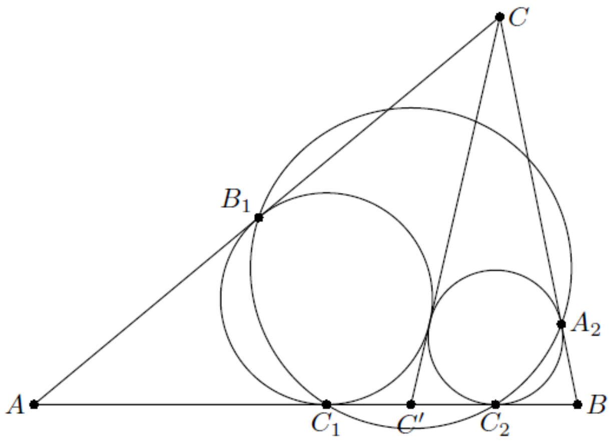
Задание 11.4
Прямоугольник размером 7×9 разделен на квадраты размером 1×1. Центральный квадрат закрашен. Доказать, что нельзя через центры всех незакрашенных квадратов провести ломанную линию так, что каждое звено соединяет центры соседних по стороне квадратов не проходя более одного раза через каждый из них.
Количество баллов 7
Ответ:
нельзя.
Подсказка
Используйте шахматную раскраску.
Решение
Окрасим клетки квадрата 7×9 в шахматном порядке, так что угловые клетки чёрные. При этом чёрных клеток будет на одну больше, чем белых. Легко проверить, что центральная клетка будет белой. Припишем квадратам чёрный и белый цвета в соответствии с этой шахматной раскраской. Тогда чёрных квадратов будет на два больше, чем белых (чёрных – 32, белых – 30). При обходе квадратов черные и белые квадраты чередуются, поскольку все соседи черного квадрата белые и наоборот. Поэтому провести такую ломанную линию нельзя.

Задание 11.5

Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке C'. Вписанная окружность треугольника ACC' касается сторон AB и AC в точках C_1, B_1. Вписанная окружность треугольника BCC', касается сторон AB и BC в точках C_2, A_2. Докажите, что прямые B_1C_1, A_2C_2 и CC' пересекаются в одной точке.

Количество баллов 7

Решение



Вписанные окружности треугольников ACC' и BCC' касаются стороны CC' в одной и той же точке. Поэтому $CB_1 = CA_2$. Кроме того, $AB_1 = AC_1$, $BA_2 = BC_2$.

Значит,

$\angle B_1C_1C_2 = \angle A + \angle AB_1C_1 = 90° + ½\, \angle A$,

$\angle B_1A_2C_2 = 180° – \angle B_1A_2C – \angle BA_2C_2 = 180° – (90° – ½\, \angle C) – (90° – ½\, \angle B) = ½\, (\angle B + \angle C)$.

Сумма этих углов равна 180°, то есть четырёхугольник $A_2B_1C_1C_2$ – вписанный. Следовательно, прямые B_1C_1, A_2C_2 и CC' пересекаются в радикальном центре трёх окружностей: описанной окружности четырёхугольника $A_2B_1C_1C_2$ и вписанных окружностей треугольников ACC', BCC' (см. рис.).