Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2021-2022 учебный год

11 класс

1. Что больше: $\frac{\sin 1°}{\sin 2°}$ или $\frac{\sin 3°}{\sin 4°}$?

Решение 1. Рассмотрим разность данных чисел и преобразуем ее:

$$\frac{\sin 1°}{\sin 2°}-\frac{\sin 3°}{\sin 4°}=\frac{\sin 1°\cdot\sin 4°-\sin 2°\cdot\sin 3°}{\sin 2°\cdot\sin 4°}=\frac{(\cos 3°-\cos 5°)-(\cos 1°-\cos 5°)}{2\sin 2°\cdot\sin 4°}=$$
$$\frac{\cos 3°-\cos 1°}{2\sin 2°\cdot\sin 4°}=\frac{-2\sin 2°\cdot\sin 1°}{2\sin 2°\cdot\sin 4°}=\frac{-\sin 1°}{\sin 4°}<0.$$

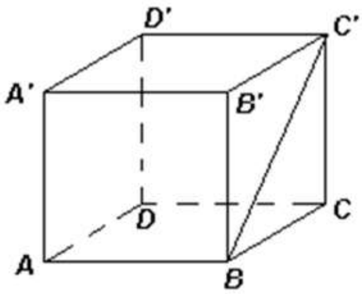
Следовательно, $\frac{\sin 1°}{\sin 2°}<\frac{\sin 3°}{\sin 4°}$

Решение 2. Рассмотрим частное данных чисел $\frac{\sin 1°}{\sin 2°}:\frac{\sin 3°}{\sin 4°}=\frac{\sin 1°\cdot\sin 4°}{\sin 2°\cdot\sin 3°}=\frac{\cos 3°-\cos 5°}{\cos 1°-\cos 5°}<1$, так как $\cos 1°>\cos 3°$. Учитывая, что данные числа – положительные, получим, что $\frac{\sin 1°}{\sin 2°}<\frac{\sin 3°}{\sin 4°}$

Ответ: $\frac{\sin 3°}{\sin 4°}$

2. Верно ли, что в трехмерном пространстве два угла с соответственно перпендикулярными сторонами либо равны, либо составляют в сумме 180°?

Решение. Рассмотрим, например, куб $ABCDA'B'C'D'$ (см. рис.). Углы ABC и $BC'C$ удовлетворяют условию, так как $AB \perp BC'$ (по теореме о трёх перпендикулярах) и $BC \perp C'C$. При этом угол ABC прямой, а угол $BC'C$ равен 45°.



Ответ: неверно.

Замечания. Разумеется, существуют и другие примеры.

3. В клетках квадратной таблицы 10×10 стоят ненулевые цифры. В каждой строчке и в каждом столбце из всех стоящих там цифр произвольным образом составлено десятизначное число. Может ли оказаться так, что из двадцати получившихся чисел ровно одно не делится на 3?

Решение. Предположим, что найдётся ровно одно число, которое не делится на 3, и оно образовано цифрами какого-то из столбцов. Тогда сумма цифр этого числа также не делится на 3. Во всех остальных столбцах числа делятся на 3, и суммы их цифр делятся на 3. Следовательно, сумма всех чисел в таблице не делится на 3. С другой стороны, число в каждой строке делится на 3, значит, сумма цифр числа в каждой строке делится на 3, то есть сумма всех чисел таблицы кратна 3. Противоречие.

Ответ: не может.

4. Могут ли три различных числа вида 2^n+1, где n – натуральное, быть последовательными членами геометрической прогрессии?

Решение. Пусть существуют такие различные натуральные числа k, m и n, что 2^k+1, 2^m+1 и 2^n+1 – последовательные члены некоторой геометрической прогрессии. Тогда $(2^m+1)^2=(2^k+1)(2^n+1)$, то есть $2^{2m}+2^{m+1}=2^{k+n}+2^k+2^n$. Но это равенство невозможно в силу единственности представления числа в виде суммы различных степеней двойки.

Ответ: не могут.

5. Значение параметра a подобрано так, что число корней первого из уравнений $4^x - 4^{-x} = 2\cos ax$, $4^x + 4^{-x} = 2\cos ax + 4$ равно 2021. Сколько корней при том же a имеет второе уравнение?

Решение. Преобразуем второе уравнение:

$4^x + 4^{-x} = 2\cos ax + 4 \iff 4^x - 2 + 4^{-x} = 2(1 + \cos ax) \iff (2^x - 2^{-x})^2 = 4\cos^2 {}^{ax}/_{2}) \iff$

$$\left[\begin{array}{l} 4^{x/2} - 4^{-x/2} = 2\cos\dfrac{ax}{2}, \\ 4^{x/2} - 4^{-x/2} = -2\cos\dfrac{ax}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 4^{x/2} - 4^{-x/2} = 2\cos\dfrac{ax}{2}, \\ 4^{-x/2} - 4^{x/2} = 2\cos\dfrac{ax}{2}. \end{array}\right.$$

Оба уравнения этой совокупности сводятся к первому уравнению из условия задачи заменами $x = 2y$ и $x = -2z$ соответственно. Поэтому каждое из этих двух уравнений имеет 2021 корень. Если же эти уравнения имеют общий корень $x = x_0$, то $4^{x_0/2} - 4^{-x_0/2} = 0$ и $\cos {}^{ax_0}/_{2} = 0$, что невозможно. Следовательно, эти уравнения не имеют общих корней, а второе уравнение из условия имеет $2\cdot 2021 = 4042$ корня.

Ответ: 4042.

Общие критерии оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.