ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2021/22 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
МАТЕМАТИКА
11 КЛАСС

Задания для обучающихся

Время выполнения – 235 минут
Максимальное количество баллов – 42

Написать только ответ — мало!
Все ответы нужно объяснить с помощью рассуждений или вычислений!

1. 2022 рыцаря и лжеца выстроились в ряд, причем крайние слева и справа – лжецы. Все, кроме крайних, высказали утверждение: “Справа от меня лжецов в 42 раза больше, чем слева”. Приведите пример ряда, в котором стоит ровно один рыцарь.

2. Докажите, что $4\cos x\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$ для всех x.

3. Почтальон Печкин едет по шоссе на велосипеде. Он заметил, что через каждые 4,5 километра его обгоняет дачный автобус, а через каждые 9 минут проезжает встречный дачный автобус. Интервал движения автобусов в обоих направлениях равен 12 минутам. С какой скоростью едет Печкин?

4. Докажите, что если $n > 4$ и $(n-1)!$ не делится на n, то n – простое число (число $n!$ равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n).

5. ABCD – равнобедренная трапеция, угол ABD равен 90°. На большем основании AD, как на диаметре, построена окружность Ω. Равнобедренный треугольник KLM (KL=LM) вписан в окружность Ω, причем KL||AB и LM||CD. Докажите, что площади треугольника KLM и трапеции ABCD равны.

6. На столе лежит 2021 кучка орехов, сначала в каждой кучке по одному ореху. Петя и Вася играют в следующую игру (первым ходит Петя). Каждым ходом можно объединить три кучки, в которых поровну орехов. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, и как ему играть?

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ

1. *2022 рыцаря и лжеца выстроились в ряд, причем крайние слева и справа –лжецы. Все, кроме крайних, высказали утверждение: “Справа от меня лжецов в 42 раза больше, чем слева”. Приведите пример ряда, в котором стоит ровно один рыцарь.*

Решение. Заметим, что 2021=43*47, поэтому если поставить рыцаря сорок восьмым по счету от левого края, то слева от него будет 47 лжецов, а справа 2021-47=42*47 лжецов.
Критерии проверки: Верный пример – **7 баллов**, если перепутано «лево» и «право» - баллы не снимать. В остальных случаях – **0 баллов**.

2. *Докажите, что* $4\cos(x)\cos(x+\frac{\pi}{3})\cos(x-\frac{\pi}{3})$ *равно* $\cos(3x)$ *для всех x?*

Решение.
$\cos(3x) = \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) = \cos^3(x) - \sin^2(x)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) = \cos(x)(\cos^2(x) - 3\sin^2(x))$
С другой стороны
$4\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right)(\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)) = \cos^2(x) - 3\sin^2(x)$
Откуда и следует требуемое равенство.
Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**. Ошибки в формулах типа «косинус суммы» **- 0 баллов**.

3. *Почтальон Печкин едет по шоссе на велосипеде. Он заметил, что через каждые 4,5 километра его обгоняет дачный автобус, а через каждые 9 минут проезжает встречный дачный автобус. Интервал движения автобусов в обоих направлениях равен 12 минутам. С какой скоростью едет Печкин?*

Ответ. 15 км/ч.
Решение. Пусть x (км/ч) и y (км/ч) - скорости движения велосипедиста и автобуса соответственно. Так как интервал движения автобусов составляет 12 минут (1/5 часа), то расстояние между двумя идущими подряд автобусами составляет y/5 км. Следовательно, в момент встречи велосипедиста с автобусом расстояние между велосипедистом и очередным встречным автобусом составляет y/5 км. Так как их встреча произойдет через 9 минут (3/20 часа), а скорость сближения равна (x+y), то 3(x+y)/20=y/5. Время между двумя последовательными обгонами равно 4,5/x, с другой стороны оно равно 1/5+4,5/y. Таким образом, имеем систему уравнений
3(x+y)=4y и 4,5/x=1/5+4,5/y, откуда x=15 км/ч.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, ход решения верный, но неверный ответ из-за арифметической ошибки – **5 баллов**, система составлена, но дальнейшее решение не закончено или неверно – **3 балла**, в остальных случаях – **0 баллов**.

4. *Докажите, что если* $n > 4$ *и* $(n-1)!$ *не делится на* n*, то* n *– простое число.*

Решение. Пусть n не простое число, то у n есть простой делитель, обозначим его через p. Очевидно, что p<n, кроме того n/p<n.
Если n/p не равно p, то в произведении (n-1)! присутствуют множители p и n/p, а поэтому (n-1)! делится на p*n/p=n, что противоречит условию.
Если n/p=p, то $n=p^2$. Так как n>4, то p>2, тогда $2p<p^2=n$, то в произведении (n-1)! присутствуют множители p и 2p, а поэтому (n-1)! делится на 2p*p=2n, что противоречит условию.
Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**. Указаны оба случая, но в одном из них рассуждения неверны или отсутствуют – **4 балла**. Только обоснован один случай, второй отсутствует – **3 балла**. В остальных случаях – **0 баллов**.

5. *ABCD – равнобедренная трапеция, угол ABD равен 90º. На большем основании AD, как на диаметре, построена окружность Ω. Равнобедренный треугольник KLM (KL=LM) вписан в окружность Ω, причем KL||AB и LM||CD. Докажите, что площади треугольника KLM и трапеции ABCD равны.*

Решение. Так как угол ABD равен 90º, то B принадлежит окружности Ω, а так как трапеция равнобедренная, то и C принадлежит Ω, то есть ABCD вписанная. Пусть α – угол при основании KM равнобедренного треугольника KLM, R – радиус окружности Ω. Поскольку боковые стороны треугольника параллельны боковым сторонам трапеции, то углы при основании трапеции также равны α, то есть $\angle BDA = \angle CDA = \angle K = \alpha$.

Так как треугольники ABD и ACD прямоугольные, то $AC = BD = 2R \sin \alpha$. Используя теорему синусов для треугольника KLM получаем, что KL=LM = 2R sin α. Пусть диагонали AC и BD трапеции пересекаются в точке P. $\angle ADB + \angle BAD = 90°$, поэтому $\angle PDA = 90° - \alpha$, аналогично $\angle PAD = 90° - \alpha$.
$\angle APB = \angle PAD + \angle PDA = 2(90° - \alpha) = 180° - 2\alpha = \angle KLM$.

Значит, $S_{KLM} = \frac{1}{2} KL \cdot ML \sin \angle KLM = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \angle APB = S_{ABCD}$.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

6. *На столе лежат 2021 кучка орехов, сначала в каждой кучке по одному ореху. Петя и Вася играют в следующую игру (первым ходит Петя). Каждым ходом можно объединить три кучки, в которых поровну орехов. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, и как ему играть?*

Ответ: Петя.

Решение. Заметим, что в конце игры количество орехов в каждой кучке будет равно степени тройки, причем кучек каждого вида будет не более двух. Такое разложение единственно, и количество кучек из 3^s орехов обязательно будет равно соответствующей цифре в разложении 2021 в троичной системе счисления. Так как $2021 = 2\cdot3^6+2\cdot3^5+2\cdot3^3+2\cdot3^2+3+2\cdot1$, то в конце получится 11 кучек. За каждый ход исчезают ровно две кучки, следовательно, количество ходов равняется $(2021–11)/2 = 1005$ вне зависимости от способа объединения кучек. Таким образом, последний ход всегда будет делать Петя, он и выиграет.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**. Указано, что в каждой кучке число орехов равно степени тройки – **1 балл**. Указано, что кучек каждого вида будет не более двух – **1 балл**. Указано разложение 2021 в троичной системе – **1 балл**. Найдено количество кучек в конце игры – **1 балл**. Указано, что за каждый ход исчезают ровно две кучки – **1 балл**. Вычислено число ходов – **1 балл**. Баллы суммируются.