Ответы. 11 класс

11.1. Ответ: 4025.

Решение.
Исходное уравнение равносильно уравнению
$Z^5 - Z^4 - 2011Z^3 + 2010 Z^2 - 2012Z + 2011 = 0$
$Z^3 (Z^2+1) - Z^2 (Z^2+1) - 2012Z (Z^2+1) + 2011 (Z^2+1) = 0$
$(Z^2+1) (Z^3 - Z^2 - 2012Z + 2011) = 0$
Действительные корни исходного уравнения совпадают с действительными корнями многочлена $f (Z) = Z^3 - Z^2 - 2012Z + 2011 = 0$.
Так как $f (-100) = -10^6 - 10^4 + 201200 + 2011 < 0$,
$f (0) = 2011 > 0$,
$f (1) = -1 < 0$
$f (100) = 10^6 – 10^4 – 201200 + 2011 > 0$,
то уравнение $f (Z) = 0$ (так же как и исходное уравнение) имеет ровно три действительных корня Z_1, Z_2, Z_3.
По теореме Виета
$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1$
$Z_1 \cdot Z_2 + Z_2 \cdot Z_3 + Z_1 \cdot Z_3 = - 2012$, откуда
$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = (Z_1 + Z_2 + Z_3)^2 – 2\cdot (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_1Z_3) = 1 – 2\cdot (- 2012) = 1 + 4024 = 4025$.

11.2. Ответ: 86.

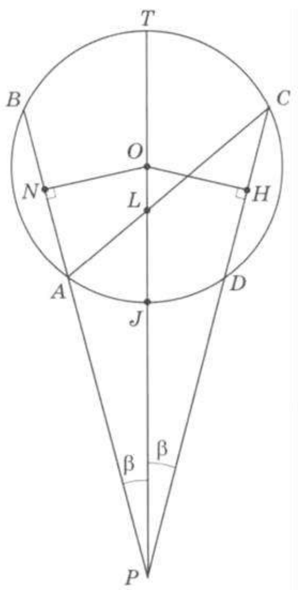
Решение.
Обозначим P(n) количества n-буквенных слов. Получаем P(1) = 1 (слово У),
P(2) = 0, P(3) = 1 (словоYZY), P(4) = 1 (словоYZZY), P(5) = 1 (словоYZYZY),
P(6) = 2 (словоYZZYZY и YZYZZY).
Дальнейший прямой подсчет становится громоздким. Получить P(7), P(8), P(9) можно, но чем больше n, тем требуется больше времени.
Но можно заметить следующее. Так как из любого слова новое слово образуется добавлением справа либо двух букв ZY, либо трёх букв ZZY, то должно выполняться равенство P(n) = P(n -3) + P(n-2).
Тогда получаем:
P(7) = P(4) + P(5) = 1 + 1 = 2,
P(8) = P(5) + P(6) = 1 + 2 = 3,
P(9) = P(6) + P(7) = 2 + 2 = 4,
P(10) = P(7) + P(8) = 2 + 3 = 5,
P(11) = P(8) + P(9) = 3 + 4 = 7,
P(12) = P(9) + P(10) = 4 + 5 = 9,
P(13) = P(10) + P(11) = 5 + 7 = 12,
P(14) = P(11) + P(12) = 7 + 9 = 16,
P(15) = P(12) + P(13) = 9 + 12 = 21,
P(16) = P(13) + P(14) = 12 + 16 = 28,
P(17) = P(14) + P(15) = 16 + 21 = 37,
P(18) = P(15) + P(16) = 21 + 28 = 49,
P(19) = P(16) + P(17) = 28 + 37 = 65,

P(20) = P(17) + P(18) = 37 + 49 = 86.
Возможны и другие способы решения.
Например, рассмотрим, вместо 20-буквенного слова, соответствующее 19-буквенное слово, образующееся из 20 буквенного слова вычеркиванием последней буквы Y. Проанализировав условие задачи, заметим, что любое такое слово состоит из m двухбуквенных наборов YZ и n трехбуквенных наборов YZZ. При этом 2 m + 3 n = 19.
Решение данного уравнения в целых числах имеет вид m = 5 – 3k, n = 3 + 2 k,
k – целое число, что приводит к трём решениям в натуральных числах
(m; n) : (2; 5), (5; 3), (8; 1).
С учетом перестановок каждое из этих решений соответственно дает:
$\frac{7!}{2!\cdot 5!} = 21$ слово, $\frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$ слов, , $\frac{9!}{8!\cdot 1!} = 9$ слов. Итого: 21 + 56 + 9 = 86 слов.

11.3. Ответ: числа m и n не могут быть различными.

Решение.
Предположим, что $m \neq n$. Всего в турнире с участием 73 теннисистов проводится $\frac{73\cdot 72}{2} = 36 \cdot 73$ игр. Пусть x теннисистов одержали по n побед, а остальные (73 – x) теннисистов – по m побед. Тогда получаем равенство
$x \cdot n + (73 - x)\, m = 36 \cdot 73$, откуда $x\,(n - m) = (36 - m) \cdot 73$.
Число 73 – простое, поэтому на него делится либо сомножитель x, либо сомножитель (n - m). Первое невозможно, так как $0 < x < 73$. А второе невозможно, так как $n < 73$, $m < 73$, следовательно, $0 < |n - m| < 73$.
Противоречие. Значит, условие $m \neq n$ не могло выполняться.

11.4. Ответ: AP = 8.



Решение.
Опустим из точки O перпендикуляры OH и ON на хорды CD и AB соответственно. Так как эти хорды равны, то и расстояния от центра окружности до этих хорд тоже равны, поэтому ON = OH. Прямоугольные треугольники POH и PON равны по катету (ON = OH) и гипотенузе (OP – общая сторона), значит, PH = PN, ∟NPO = ∠HPO, т.е. PO – биссектриса угла BPC. В равнобедренном треугольнике AOB (AO = OB – радиусы одной окружности) ON – высота, по свойству равнобедренного треугольника ON – медиана, т.е. BN = NA = 2. Аналогично, CH = HD = 2, т.е. AN = DH =2. Отсюда следует, что AP = PD = x.

Так как PL – биссектриса треугольника APC, то $\frac{PA}{PC} = \frac{AL}{LC}$, то есть $\frac{x}{x+4} = \frac{2}{3}$, 3x = 2x + 8, x = 8. Ответ: 8.

11.5. Ответ: Выигрывает второй.

Решение.

Выигрывает тот, после чьего хода в кучках не осталось камней. Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Если первый игрок первым ходом взял 1 камень из какой-нибудь кучки, то второму следует взять по 1 камню из двух других кучек. Если же первый игрок первым ходом взял по 1 камню из каких-то двух кучек, то второму следует взять 1 камень из оставшейся кучки. Таким образом, после хода второго в первой кучке будет лежать 6 камней, во второй – 8 камней, в третьей – 10 камней, т.е. в каждой кучке будет лежать четное число камней. Каждым следующим ходом второй должен брать столько же камней и из тех же кучек, что и первый, т.е. после каждого хода второго в каждой кучке будет оставаться четное число камней. Второй всегда сможет сделать ход, так как после хода первого в тех кучках, из которых он брал камни, будет оставаться нечетное число камней, т.е. хотя бы по одному. А так как второй всегда сможет сделать ход, то именно он заберет последние камни из кучек и выиграет.