

11 класс

1. Докажите, что произведение n положительных чисел с фиксированной суммой максимально, когда они все равны между собой.

Решение. Предположим противное. Есть набор чисел x_1, x_2, \dots, x_n с суммой S , что их произведение максимально и не все числа равны между собой. Рассмотрим два неравных числа a и b , $a > b$ из этого набора и заменим их на равные числа $a_1 = a - \frac{a-b}{2}$, $b_1 = b + \frac{a-b}{2}$ с той же суммой. Покажем, что $a_1 b_1 > ab$:

$$a_1 b_1 = \left(a - \frac{a-b}{2}\right) \left(b + \frac{a-b}{2}\right) = ab + \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} = ab + \frac{(a-b)^2}{2} > ab.$$

Таким образом, в этом случае мы можем увеличить произведение всех чисел, сохраняя сумму. Противоречие.

2. Найдите все возможные пары простых чисел $(p; q)$ такие, что уравнение

$$x^4 + px^3 - q = 0$$

имеет целый корень.

Решение. Из уравнения следует, что $q = x^3(x+p)$ для некоторого целого числа x . Поскольку q делится на x^2 , а q простое, имеем, что $x^2 = 1$ или $x^2 = q$. Но равенство $x^2 = q$ невозможно, поскольку среди простых чисел нет квадратов. Следовательно, $x^2 = 1$, то есть, $x = 1$ или $x = -1$. Тогда $q = 1 - p$ или $q = p + 1$. Равенство $q = 1 - p$ невозможно, поскольку тогда $q + p = 1$, а все простые числа не меньше 2. Стало быть, $q = p + 1$. Но тогда p и q имеют разную чётность. Следовательно, одно из них чётное, то есть, равно 2. Поскольку 1 простым числом не является, имеем единственный вариант $p = 2$, $q = 3$. **Ответ:** $p = 2$, $q = 3$.

3. В трёхмерном пространстве задана евклидова система координат $Oxyz$. Точки кривой имеют координаты $(\sin \varphi, \cos \varphi, \sin \varphi)$, где φ пробегает отрезок $[0; 2\pi]$. Докажите, что все точки кривой лежат в одной плоскости.

Решение. Всякую плоскость можно задать уравнением вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D – вещественные константы, причём первые три не все равны нулю. Для решения задачи достаточно указать такие значения этих констант, что уравнение плоскости будет оставаться верным для всех значений φ . Очевидно, подходят значения $A = 1, B = 0, C = -1, D = 0$.

4. В множестве, состоящем из n элементов, выделено 2^{n-1} подмножеств, любые три из которых пересекаются (есть хотя бы один элемент, принадлежащий этим трём множествам). Докажите, что все они имеют общий элемент.

Решение. Всего подмножеств 2^n , то есть выделена ровно половина подмножеств. Рассмотрим некоторое подмножество и его дополнение. Поскольку они не пересекаются, то выделено должно быть только одно из них. Значит, с каждым двумя выделенными подмножествами их пересечение тоже должно быть выделено, поскольку дополнение пересечения не подходит (пересечение с исходными двумя пустое). Таким образом, последовательно перебирая все выделенные подмножества, можно на каждом шаге получать множество общих элементов и оно будет непустым.

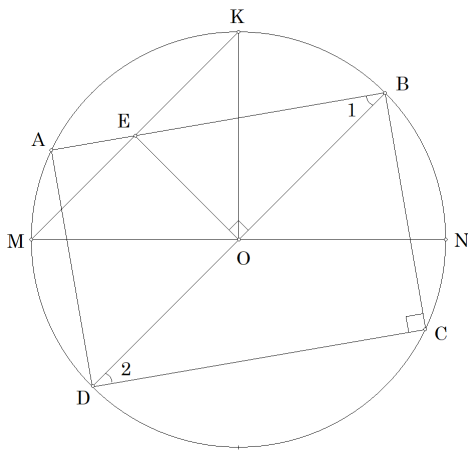
5. В окружности с центром O проведен диаметр MN , отмечены точка K – середина дуги MN , точка E – середина хорды MK и точка B – середина дуги KN , проведена

хорда AB , которая проходит через точку E . На отрезке AB , как на стороне, построен прямоугольник $ABCD$ так, что его вершины C и D тоже лежат на окружности. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если диаметр окружности равен d .

Решение. Проведем радиусы OK и OB , тогда треугольник $МОК$ – прямоугольный и равнобедренный. Отрезок EO – его медиана, высота и биссектриса, поэтому углы $\angle MOE = \angle EOK = \angle KOB = \angle BON = 45^\circ$. Угол $\angle BOE = \angle EOK + \angle KOB = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, значит, треугольник BOE – прямоугольный. Если диаметр окружности равен d , тогда $OB = \frac{d}{2}$, и $EO = \frac{d\sqrt{2}}{4}$. В прямоугольном треугольнике BOE сторона

BE является гипотенузой, поэтому $BE = \sqrt{EO^2 + BO^2} = \sqrt{\left(\frac{d\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{d}{4}\sqrt{6}$.

Хорду MK выразим как гипотенузу треугольника $МОК$: $MK = \frac{d\sqrt{2}}{2}$, поэтому $ME = EK = \frac{d\sqrt{2}}{4}$.



Длину отрезка AE найдем, используя теорему об отрезках пересекающихся хорд: $AE \cdot BE = ME \cdot EK$, поэтому $AE = \frac{ME \cdot EK}{BE} = \frac{d\sqrt{6}}{12}$, поэтому отношение длин отрезков: $AE : BE = \frac{d\sqrt{6}}{12} : \frac{d\sqrt{6}}{4} = 1 : 3$.

Найдем сторону AB прямоугольника $ABCD$ как сумму длин отрезков его составляющих: $AB = AE + BE = \frac{d\sqrt{6}}{12} + \frac{d\sqrt{6}}{4} = \frac{d\sqrt{6}}{3}$. Прямоугольные треугольники BOE и $BСD$ подобны по двум углам: кроме прямых углов у них ещё $\angle 1 = \angle 2$ – накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD . Значит, стороны треугольников пропорциональны, составим пропорцию $\frac{BE}{BD} = \frac{EQ}{BC}$, поэтому $BC = \frac{EO \cdot BD}{BE} = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Теперь вычислим площадь прямоугольника $ABCD$:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = \frac{d\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d^2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\frac{d^2\sqrt{2}}{3}$.