Решения задач 11 класса (1-й вариант).

1. Дима едет по прямому шоссе из пункта А в пункт Б. Из пункта Б по направлению к Диме тянется пробка, длина которой увеличивается со скоростью v км/ч. Скорость движения машины в пробке равна 10 км/ч, а вне пробки — 60 км/ч. Навигатор в машине в каждый момент времени показывает, сколько времени осталось Диме ехать до пункта Б, исходя из длины пробки в этот момент. В некоторый момент (еще не доехав до пробки) Дима обнаружил, что навигатор показывает то же время, что и несколько минут назад. Найдите v.

Ответ (в обоих вариантах): 12 *км/ч. Пусть между двумя одинаковыми показаниями навигатора прошло время t ч. За это время расстояние между машиной и пробкой уменьшилось на $(60+v)t$ км, поэтому время на преодоление этого расстояния (с точки зрения навигатора) уменьшилось на $(60+v)t/60$ ч. С другой стороны, пробка удлинилась на vt км, и время на её преодоление выросло на $vt/10$ ч. Эти две величины должны быть равны, т.е. $(60+v)t = 6vt$, откуда $v = 12$ км/ч.*

2. Сергей выписал числа от 500 до 1499 в строчку в некотором порядке. Под каждым числом, кроме самого левого, он написал НОД этого числа и его левого соседа, получив вторую строчку из 999 чисел. Далее он по тому же правилу получил из неё третью строчку из 998 чисел, из неё — четвертую из 997 чисел и т. д. Остановился он, когда впервые все числа в очередной строчке оказались равны единице. Какое наибольшее количество строчек он мог выписать к этому моменту?

Ответ: 501 *(во 2-м варианте* 10001*).*

Докажем, что в 501*-й строчке все числа уже равны 1. В самом деле, если в ней есть число $d \neq 1$, то в* 500*-й строчке есть* 2 *два числа, кратных d, в* 449*-й —* 3 *таких числа, …, в 1-й строчке есть* 501 *таких чисел. Но ни у какого числа d нет столько кратных среди* 1000 *подряд идущих чисел!*

Таким образом, больше 501 *строчки Сергей выписать не мог. Если же он расположит в первой строчке сначала* 500 *четных чисел, а затем* 500 *нечетных, то в* 500*-й строчке останется четное число, поэтому он остановится лишь после* 501*-й строчки.*

3. В правильном 20-угольнике отмечены четыре последовательные вершины A, B, C и D. Внутри него выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle BEC = 2\angle CED$. Найдите угол AEB.

Ответ: 39° *(во 2-м варианте: 36°).*

Заметим, что $ABCD$ — равнобедренная трапеция с углами $\angle ABC = \angle DBC = 180^\circ \cdot 18/20 = 162^\circ$. Точка E лежит на серединном перпендикуляре к основанию AC, а следовательно, треугольник BEC равнобедренный. Проведем в нем высоту EH, а из точки C опустим перпендикуляр CK на прямую ED. Имеем: $\angle CEH = \angle BEC/2 = \angle CED$. Поэтому прямоугольные треугольники CEH и CEK равны по острому углу и гипотенузе. В частности, $CK = CH = DC/2 = CD/2$, поэтому в прямоугольном треугольнике CKD угол KDC равен 30°. В четырехугольнике $CDEH$ три угла равны 30°, 162° и 90°, поэтому последний его угол HED равен 78°. Наконец, $\angle CEK = \angle HED/2 = 39^\circ$, и $\angle AEB$ равен тому же.

4. Даны различные многочлены $f(x)$ и $g(x)$ степени 3. Оказалось, что многочлены $f(f(x))$ и $(g(x))^3$ равны, а также равны многочлены $f(g(x))$ и $(f(x))^3$. При этом $f(0) = 1$. Найдите все такие пары многочленов f, g.

Ответ: $f(x) = -x^2 + 3x^2 - 3x + 1 = (1-x)^3$, $g(x) = (x-1)^3 + 1$. (Во 2-м варианте: $f(x) = -2 - (x+2)^3$, $g(x) = (x+2)^3$.)

Пусть $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$. По условию, $af^3(x) + bf^2(x) + cf(x) + 1 = g^3(x)$ и $ag^3(x) + bg^2(x) + cg(x) + 1 = f^3(x)$. Вычитаем из первого равенство второе: $(a+1)(f^3(x) - g^3(x)) + b(f^2(x) - g^2(x)) + c(f(x) - g(x)) = 0$. Это выражение легко разложить на два множителя, и поскольку один из них $f(x) - g(x)$ — ненулевой многочлен, второй множитель должен быть нулевым: $(a+1)(f^2(x) + f(x)g(x) + g^2(x)) + b(f(x) + g(x)) + c = 0$.

Заметим, что $f^2(x) + f(x)g(x) + g^2(x)$ — многочлен 6-й степени (его коэффициент при x^6 имеет вид $a^2 + aa_1^2 + a_1^2 \neq 0$, где a_1 — старший коэффициент $g(x)$). Поэтому $a+1$ должно быть равно 0. Итак, $a = -1$, и при этом $b(f(x) + g(x)) = -c$. Это возможно в двух случаях:

1) $b = c = 0$. Тогда $-f^3(x) + 1 = g^3(x)$, т.е. $f^3(x) + g^3(x) = 1$. Но многочлен в левой части равен произведению $(f+g)(f^2 - fg + g^2)$, и вторая скобка — многочлен шестой степени (аналогично тому, что уже обсуждалось выше). Следовательно, так не бывает.

2) $f(x) + g(x) = -c/b$ — постоянный многочлен. Обозначим $-c/b = T$, $g(x) = T - f(x)$. Подставив это в первое условие, получим $-f^3(x) + bf^2(x) + cf(x) + 1 = (T - f(x))^3 = -f^3(x) + 3Tf^2(x) - 3T^2 f(x) + T^3$. Отсюда следует, что $b = 3T$, $c = -3T^2$, $1 = T^3$, т.е. $f(x) = -x^2 + 3x^2 - 3x + 1 = (1-x)^3$, $g(x) = 1 - (1-x)^3 = (x-1)^3 + 1$.

5. Экзамен состоит из $N \geqslant 3000$ вопросов. Каждый из 31 ученика выучил ровно 3000 из них, причем любой вопрос знает хотя бы 29 учеников. Перед экзаменом учитель открыто выложил все карточки с вопросами

по кругу. Он велел ученикам указать один из вопросов, и объяснил, что он выдаст этот вопрос первому по алфавиту ученику, следующий по часовой стрелке вопрос — второму ученику, следующий — третьему и т. д. (каждому ученику по одному вопросу). Однако, ученики не смогли указать такую карточку, чтобы каждый из них получил известный ему вопрос. При каком наименьшем N такое могло произойти?

Ответ: $N = 3100$.

Каждый из учеников не знает $N - 3000$ *вопросов и таким образом, может мысленно отметить ровно столько карточек, которые его не устраивает в качестве начальной. Вместе все они укажут не более чем* $31(N - 3000)$ *разных карточек. Если* $31(N - 3000) < N$, *то ученики смогут указать карточку, которая устраивает всех. Это неравенство равносильно* $30N < 31 \cdot 3000$, *т.е.* $N < 3100$. *Итак, при* $N < 3100$ *описанная в условии ситуация невозможна.*

Пусть $N = 3100$. *Опишем ситуацию (одну из многих), удовлетворяющую условию задачи. Занумеруем карточками числами от* 1 *до* 31000. *Пусть первый ученик знает все вопросы, кроме тех* 100 *карточек, номера которых дают остаток* 1 *от деления на* 31. *Второй знает все карточки, кроме карточек с остатком* 3, *и тем самым его не устраивают начальные карточки с остатком* 2. *Третий знает все карточки, кроме остатков* 5, *и тем самым запрещает начальные карточки с остатком* 3. *В общем виде,* k*-й ученик не знает вопросы с остатком* $2k - 1$ *и тем самым запрещает начальные карточки с остатком* k. *Таким образом, запрещены все карточки. При этом каждый знает ровно* 3000 *вопросов, и каждый вопрос знают все, кроме одного ученика.*