Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

Решения и указания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. При неполном решении задачи, баллы обычно выставляются пропорционально тому, какой процент полезных интеллектуальных усилий, нужных для её решения, был затрачен. Например, не следует вообще давать баллы за рассмотрение легких частных случаев, которые никак не проясняют общей картины.

За задачи, которые решены почти полностью, но в решении которых допущены мелкие ошибки (скажем, арифметические), мы рекомендуем вычитать один или два балла в зависимости от характера допущенной ошибки.

Следует отметить, что проверка решений задач и выставление баллов является в любом случае процессом **творческим** и не до конца поддаётся формализации. Поэтому трудно дать рекомендации, охватывающие все возможные ситуации, которые могут возникнуть в ходе проверки. Решения задач, полученных учениками, безусловно, могут отличаться от авторских. Единственным критерием в этом случае является правильность рассуждений.

Некоторые предложения по выставлению баллов, касающиеся отдельных задач, приведены ниже.

В тех задачах, где требуется построить какой-либо пример, не обязательно приводить рассуждения о том, как именно он был получен. В случае, если правильность примера легко проверяется, его достаточно всего лишь предъявить. К этой группе задач относятся VII.5, VIII.2 (где желательно хотя бы краткое обоснование). Однако во многих задачах, помимо верного примера, нужно бывает обосновывать или единственность найденного решения (как в числовом ребусе), или тот факт, что найденное число является наименьшим возможным.

Задачи VII.1, VII.4, VIII.1, VIII.3, VIII.4, X.1, X.4, XI.5 относятся к числу обычных школьных. Их оценка должна производиться в соответствии с обычной практикой. Максимальный балл даётся за полное решение.

В задаче VII.2 за верный ответ в решении числового ребуса, без обоснования единственности решения, присуждается 3 балла. То же самое касается задачи VII.3, если верный ответ указан, но не обоснован.

В задаче VIII.5 баллы даются только при наличии полного обоснования. За использование идеи раскраски можно давать 1 балл.

В задаче IX.1 за верную идею подсчёта можно давать до 3 баллов, если в вычислениях допущены ошибки. При этом, если у кого-то фигурирует допущение, что двузначное число может начинаться с нуля (что является грубой ошибкой), а всё остальное верно, даётся не более 1 балла.

В задаче IX.2 требуется полное обоснование ответа.

В задаче IX.3 за оба найденных варианта без обоснования можно давать до 3 баллов.

За верный ответ в задаче IX.4 можно давать до 2 баллов. Если разобран пример с 17 серединами, можно давать до 3 баллов.

В задаче XI.5 за пример с 13 кораблями даётся 2 балла.

В задаче X.2 за верный пример (без обоснования) можно давать до 3 баллов.

В задачах X.3, XI.3 за верное нахождение двух пар корней можно присуждать до 3 баллов.

В задаче X.5 за попытки указать конкретную стратегию игры, но без полного и точного обоснования, баллы не присуждаются.

В задаче XI.1 баллы не присуждаются за использование приближённых вычислений с десятичными цифрами. Применение формул сокращённого умножения, с точным сравнением квадратных корней, вполне допустимо.

В задаче XI.2 годится любая логически обоснованная схема с двумя взвешиваниями.

За задачу XI.4 можно давать до 1 балла за полное рассмотрение одного или нескольких частных случаев (например, чисел, составленных из заданного набора цифр типа 1, 2, 3 с полным анализом всех остатков).

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2021 – 2022 учебный год

11 класс (решения)

1. Ответ: $\sqrt[6]{18}$.

   Возведём оба числа в шестую степень. Найти $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6$ можно при помощи формул сокращённого умножения, последовательно возводя в куб и в квадрат. Однако рассмотрим более простой с вычислительной точки зрения способ.

   Для начала заметим, что число $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ является корнем квадратного уравнения, из которого $x^2 = x+1$. Тогда $x^3 = x^2+x = 2x+1$, и далее последовательно выражаем остальные степени: $x^4 = 2x^2 + x = 3x + 2$, $x^5 = 3x^2 + 2x = 5x + 3$, $x^6 = 5x^2 + 3x = 8x + 5$. Теперь ясно, что $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^6 = 4(1 + \sqrt{5}) + 5 = \sqrt{80} + 9 < 9 + 9 = 18$, то есть $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < \sqrt[6]{18}$.

2. При первом взвешивании положим на одну чашу монеты 2 и 3 (число граммов будем везде опускать), а на другую чашу 5. Если установится равновесие, то бракованной монетой является 1. При втором взвешивании кладём 1 и 2 на одну чашу, и 3 на другую. При равновесии получается, что бракованной будет монета 5.

   Предположим, что равновесия нигде не наблюдалось. Тогда бракованной будет монета 2 или 3. По результату первого взвешивания мы тогда узнаем, легче или тяжелее она остальных. При втором взвешивании 2 и 3 лежат на разных чашах, одна из них перевесит, и мы будем знать, на какой из этих чаш находится бракованная монета, зная, в какую сторону вес такой чаши должен отклониться.

3. Ответ: при $x \in \{1 \pm \sqrt{5}, 1 \pm \frac{10}{9}\sqrt{3}\}$.

   Пусть $y = \sqrt[3]{1+x}$, $z = \sqrt[3]{3-x}$. Тогда $y^3+z^3 = 4$. Положим $y+z = k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $k \neq 0$. Тогда $\frac{4}{k} = \frac{y^3+z^3}{y+z} = y^2 - yz + z^2 = (y+z)^2 - 3yz = k^2 - 3yz$, откуда $yz = \frac{k^3-4}{3k}$.

   Числа y, z оказываются корнями квадратного уравнения $t^2 - kt + \frac{k^3-4}{3k} = 0$. Его дискриминант равен $D = \frac{16-k^3}{3k} \geq 0$. Понятно, что k не может быть отрицательным, откуда $0 < k \leq \sqrt[3]{16}$, то есть $k = 1$ или $k = 2$.

В первом случае y, z – корни уравнения $t^2 - t - 1 = 0$, где $x = t^3 - 1$. Ясно, что $t^2 = t + 1$, $t^3 = t^2 + t = 2t + 1$, то есть $x = 2t = 1 \pm \sqrt{5}$. Достаточно очевидно, что это даёт решения исходного уравнения.

Во втором случае $t^2 - 2t + \frac{2}{3} = 0$, откуда $t^2 = 2t - \frac{2}{3}$, $t^3 = 2t^2 - \frac{2}{3}t = \frac{10t}{3} - \frac{4}{3}$. Корни имеют вид $t = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, что даёт $x = t^3 - 1 = 1 \pm \frac{10}{9}\sqrt{3}$. Из общих соображений понятно, что найденные значения подходят (поскольку для них система от y, z даёт решение).

Итого решений в действительных числах получается четыре.

4. Ответ: нет, нельзя.

   Покажем, что хотя бы один из остатков таким образом не получается.

   Прежде всего, если все три цифры имеют одну и ту же чётность, то и остатки, получаемые из чисел, имеют ту же самую чётность. Поэтому для трёх цифр будем рассматривать два случая: ЧЧН и ННЧ (две цифры чётны, одна нечётна, либо наоборот).

   Пусть состав цифр имеет вид ЧЧН. Чтобы получить нечётный остаток, нужно последней цифрой взять нечётную. Далее рассмотрим остатки от деления на 4 двузначного числа, образованного двумя последними цифрами. Последнюю цифру фиксируем, а предпоследнюю меняем, получая три значения. Остаток же принимает всего два значения: 1 или 3. Значит, какое-то из этих двух значений встретится только один раз. В принципе, можно сразу отметить, что в этом случае предпоследняя цифра совпадает с последней, то есть она нечётна (напомним, что повторять цифры разрешено).

   Итак, мы выяснили, что имеется остаток r от деления на 4, который получается только одним способом за счёт двузначного числа на конце. Из него надо получить четыре остатка от деления на 16, а именно, значения r, $r + 4$, $r + 8$, $r + 12$. Однако первая цифра принимает только три значения, и один из остатков точно не реализуется.

   Пример: цифры 2, 3, 4. (Будем стандартно говорить “по модулю m”, если речь об остатках от деления на m.) Чтобы по модулю 4 получилось 1, на конце должно стоять 33. По модулю 16, это 1. Первую цифру мы умножаем на 100, что заменяется на 4, и далее берётся остаток от деления на 16. В нашем примере это 8, 12, 0. Значение 4 не возникает. Значит, $4+33 = 5$ по модулю 16 получиться не может.

   Случай ННЧ полностью аналогичен. Если две последние цифры взять одинаковыми, то соответствующее значение r по модулю 4 возникает только этим способом. Варьируя первую цифру, получаем только три возможности, а не четыре — для остатков r, $r + 4$, $r + 8$, $r + 12$.

   Пример: цифры 1, 2, 3 (то, что они взяты подряд, ситуацию никак не упрощает). На конце ставим 22, за счёт первой цифры прибавляется 4, 8 или 12, но не прибавляется 0. Поэтому значение $22 = 6$ по модулю 16 не возникает в качестве остатка.

5. Ответ: $\frac{8}{3}$.

   Положим $a = AB = BC$, $AC = 2b$. Тогда высота, опущенная на основание, равна $h = \sqrt{a^2 - b^2}$. Площадь равна $S = bh$, а полупериметр равен $p = a + b$. Отсюда $r = \frac{S}{p} = \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$.

   По теореме синусов, $a = 2R\sin\hat{A} = \frac{2Rh}{a}$, откуда $R = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}$. Наконец, окружность, вписанная в сегмент, касается отрезка AB в его середине. Высота сегмента равна $2r$, поэтому расстояние от центра O описанной окружности до середины D отрезка AB равно $R - 2r$. Из подобия прямоугольных треугольников OBD и CBK, где K — середина AC, имеем $\frac{R-2r}{R} = \frac{b}{a}$. Тем самым, $\frac{2r}{R} = \frac{a-b}{a}$.

   Используя выражения для r и R через величины a, b, имеем уравнение

$$\frac{2r}{R} = \frac{4b(a^2 - b^2)}{a^2(a + b)} = \frac{4b(a - b)}{a^2} = \frac{a - b}{a}.$$

   Упрощая, получаем $a = 4b$. Отсюда $r = \frac{b\sqrt{15}}{5}$ и $R = \frac{8b}{\sqrt{15}}$, то есть $R : r = \frac{8}{3}$.