Ключи муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике
2021-2022 учебный год
11 класс
Продолжительность олимпиады: 235 минут.

Код участника:___________________

Критерии оценивания работ участников:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Максимально возможное количество баллов за каждое задание: 7 баллов
Максимальное количество баллов по всем возрастным параллелям – 35 баллов.
Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

11.1. Два бегуна, стартовав одновременно, с постоянными скоростями, бегут по кольцевой дорожке в противоположных направлениях. Один из них пробегает кольцо за 5 минут, а второй – за 8 минут. Найти число различных точек встречи бегунов на дорожке, если они бегали не менее часа.

Решение.
Пусть длина дорожки равна S метров. Тогда скорость бегунов равна соответственно S/5 и S/8 метров в минуту.
Предположим, что бегуны стартуют из одной точки. Тогда они встретятся снова через S/(S/5 + S/8) = 40/13 минут.
Выясним теперь, через какое время они снова встретятся в точке старта. Если при этом первый пробежит кольцевую дорожку n раз, а второй – m раз, то, сравнив время, получим 5n = 8m, n = 8a, m=5b, где a, b – натуральные числа.
Наименьшие возможные значения a и b равны 8 и 5 соответственно. Следовательно, в точку старта они снова впервые попадут одновременно через $5\cdot 8=40$ минут. Каждые 40/13 минут они встречаются на дорожке. Всего получится 40: (40/13) = 13 различных точек встречи.
Если они стартуют из разных точек, то они встретятся не более, чем через 40/13 минуты. Далее события будут развиваться аналогично п.1 с периодом 40 минут. Поскольку 40 + 40/13 минут меньше часа, то за час получится ровно 13 точек встречи.
Ответ*:* 13 точек.

Критерии проверки:
7 баллов – рассмотрены и обоснованы оба случая движения бегунов.

5 баллов – рассмотрен и обоснован только один случай движения бегунов.

11.2. Насколько одно из двух положительных чисел больше другого, если их среднее арифметическое равно $2\sqrt{3}$, а среднее геометрическое $\sqrt{3}$?
(Указание: средним геометрическим двух чисел *m* и *n* называется число $p = \sqrt{mn}$).

Решение.
Обозначим неизвестные числа через x и y. Тогда из условия задачи получим:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = 2\sqrt{3}, \\ \sqrt{xy} = \sqrt{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 4\sqrt{3}, \\ xy = 3. \end{cases}$$

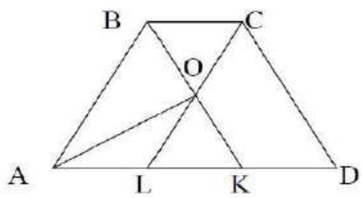
Тогда $|x-y| = \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = \sqrt{4^2 \cdot 3 - 4 \cdot 3} = 6.$

Возможны другие способы решения.

Ответ*:* 6.

11.3. Один из углов трапеции равен 60º. Найдите отношение её оснований, если известно, что в эту трапецию можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность.

Решение.
Так как ABCD вписанная, то она равнобедренная, т.е. AB=CD.
Так как угол BAD=60^0, то ABC=120^0.
Центр вписанной окружности лежит в точке O пересечения биссектрис BK и AO углов BAD и
ABC.
Т.к. углы ABK=60^0= BAK, то треугольник ABK – равносторонний, значит, биссектриса AO
является медианой в этом треугольнике.
Биссектриса OL угла BCD также проходит через точку O. А так как O – середина BK, то OL –
средняя линия треугольника ABK (проходит через середину BK и параллельно AB), следовательно AL=LK. Аналогично LK=KD. Треугольники BCO и LKO – правильные (углы по 60^0) и их стороны равны (BO=OK), следовательно BC=LK=AL=KD, т.е. 3BC=AD.



Ответ. 1:3

11.4. Петя на ребре AB куба ABCDA1B1C1D1 отметил точку X, делящую ребро AB в отношении 1:2, считая от вершины A. Приведите пример, как Петя может отметить на ребрах CC1 и A1D1 соответственно точки Y и Z, чтобы треугольник XYZ был равносторонним. Ответ обоснуйте.

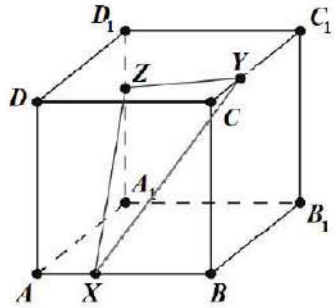
Решение.

Отметим точки Y и Z так, что A1Z:ZD1 = 2:1, C1Y: YC = 2:1. Равенство сторон треугольника XYZ следует, например, из равенства ломаных XAA1Z, ZD1C1Y и YCBX. Пусть, a – длина ребра данного куба. Тогда звенья ломаных равны

$XA = ZD_1 = YC = \frac{a}{3}$,

$AA_1 = D_1C_1 = CB = a$,

$A_1Z = C_1Y = BX = \frac{2a}{3}$.



Из равенства треугольников ΔXBC = ΔYC1D1 = ΔZA1A (прямоугольные треугольники с равными катетами) следует, что XC=YD1=ZA. Ребро CC1 перпендикулярно грани ABCD, значит угол XCY = 90º, т.е. Δ XCY – прямоугольный. Аналогично прямоугольными являются треугольники YD1Z, ZAX. Из равенства треугольников ΔXCY = ΔYD1Z = ΔZAX (прямоугольные треугольники с равными катетами) следует, что XY = YZ = ZX.

Замечания.

1. Стороны ΔXYZ – диагонали равных прямоугольных параллелепипедов с ребрами *a, a/3* и *2a/3*, где *a* – длина ребра данного куба. Их длины можно вычислить, используя пространственную теорему Пифагора.
2. Точки X, Y и Z переходят друг в друга при повороте куба на 120º вокруг диагонали B1D.

Критерии .

Любое полное верное решение (приведен верный пример расположения точек, и доказано, что условие задачи выполнено) – 7 баллов

В целом верное решение, содержащее пробелы в обосновании, - 5-6 баллов.

Например, если не доказано, что из равенства ломаных следует равенство сторон треугольника – 5 баллов.

Верно указаны точки, но не доказано, что полученный треугольник равносторонний, - 3 балла.

Некоторые разумные идеи, не приведшие к верному решению – 1 балл.

Только верный ответ – 0 баллов.

11.5. Натуральные числа от 1 до 9 раскрасили в два цвета. Доказать, что найдутся среди них три различных числа одного цвета, составляющие арифметическую прогрессию.

Решение: Выберем для раскраски белый и черный цвета так, что 9 имеет белый цвет. Предположим, что наше утверждение неверно.

Рассмотрим случай, когда 1 и 3 имеют белый цвет:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б		Б						Б

Тогда 2, 5, 6 — черные:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	Ч	Б		Ч	Ч			Б

Значит 4 и 7 — белые:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	Ч	Б	Б	Ч	Ч	Б		Б

Мы пришли к противоречию, поскольку 8 не может быть ни черным, ни белым из-за прогрессий: 7, 8, 9;   2, 5, 8.
Точно также приводят к противоречию оставшиеся три случая для 1 и 3:
(Б, Ч), (Ч, Б), (Ч, Ч).

Критерии.
Присутствуют отдельные важные идеи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)-1 б.
Рассмотрены один-два варианта раскраски с обоснованием – 2 б.