Всероссийская олимпиада школьников 2021/2022 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
9 класс

Общее время выполнения работы – 3 часа 55 мин (235 минут).
Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.
При наличии дополнительных критериев решение школьника оценивается в соответствии с ними.

Задание 9.1
При каких натуральных n выражение $n^2 - 4n + 11$ является квадратом натурального числа?
Количество баллов 7
Ответ:
при $n = 5$
Решение
Пусть $n^2 - 4n + 11 = t^2$.
Отметим, что $n^2 - 4n + 4 = (n - 2)^2$ – также квадрат некоторого целого числа $r = n - 2$, меньшего t.
Получаем, что $t^2 - r^2 = (t + r)(t - r) = 7$.
Числа $(t + r)$ и $(t - r)$ – натуральные и первое больше второго.
Значит $(t + r) = 7$, а $(t - r) = 1$.
Решив эту систему, получаем $t = 4$, $r = 3$, что дает $n = 5$.

Задание 9.2
Пусть a, b, c – длины сторон треугольника. Доказать, что:
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}<\frac{5}{2}$$
Количество баллов 7

Решение

Не умаляя общности (в силу симметрии относительно *a, b, c*), можно считать, что:

$a \le b \le c$

Тогда:

$\frac{a}{b+c} \le \frac{a}{a+a} = \frac{1}{2}$

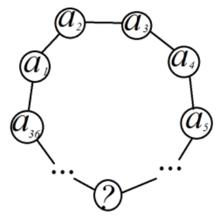
$\frac{b}{a+c} < 1$

$\frac{c}{b+a} < 1$

Здесь 2-ое и 3-е неравенства – следствие неравенства треугольника.
Складывая эти три неравенства, получим доказываемое неравенство.

Задание 9.3

36 кружков, расположенных по кругу, последовательно соединили отрезками. На каждом отрезке записали некоторое число, а в каждом кружке – сумму двух чисел, записанных на входящих в него отрезках. После этого стёрли все числа на отрезках и в одном из кружков (см. рисунок.). Можно ли найти число, стёртое в кружке?



Количество баллов 7

Ответ:

Можно

Решение

Раскрасим кружки, чередуя два цвета, белый и чёрный. Тогда каждый отрезок войдёт по одному разу в кружок каждого цвета, поэтому сумма чисел в белых кружках будет равна сумме чисел в чёрных кружках (каждая из них равна сумме всех чисел, которые были записаны на отрезках). Отсюда ясно, что стёртое число равно разности суммы чисел в оставшихся белых и суммы чисел в оставшихся черных кружках (с нужным знаком.

Дополнительные критерии

Предложена идея раскраски без решения – 2 балла

Задание 9.4

На сторонах *BC* и *CD* квадрата *ABCD* отмечены точки *M* и *K* соответственно так, что $\angle BAM = \angle CKM = 30^0$. Найдите угол *AKD*.

Количество баллов 7

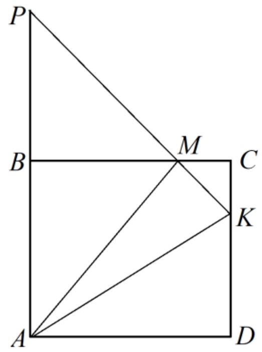
Ответ:

75^0

Решение

Первое решение

Если находить угол *AKD*, то он присутствует только в треугольнике *AKD*, еще один угол которого мы не знаем.



А вся информация задачи находится выше прямой *AK*. Значит, нам уходить выше.

И значит искать нужно угол *AKM*. Треугольник *AKM* тоже не хороший, вряд ли от него можно ожидать свойств равносторонности или даже равнобедренности. Поэтому достраиваем угол *AKM* до еще одного треугольника: продолжаем *KM*.

Она пересечет *AB* в некоторой точке *P*. В этом треугольнике сразу отмечаем, что угол *P* равен 30^0. Поэтому треугольник APM равнобедренный. Попробуем выразить длины сторон треугольника *AKP*. Для этого обозначим сторону квадрата через *a*. Тогда треугольники *PBM* и *ABM* равны, следовательно, *AP* = 2*a*. Далее, *PM* = *AM* = 2*BM* (катет лежащий напротив угла в 30^0 равен половине гипотенузы) и *MK* = 2*MC*.

Тогда $PK = 2(BM + MC) = 2a$. Как и ожидали, треугольник APK равнобедренный, угол K в нем равен 75^0 и искомый угол равен 75^0.

Второе решение

KA оказался биссектрисой угла MKD. MA – биссектриса BMK. Это внешние углы треугольника MKC. Осталось увидеть, что AC – биссектриса внутреннего угла C этого треугольника. Значит, точка A – центр вневписанной окружности треугольника MCK. Проводим в квадрате диагональ AC. Тогда точка A является точкой пересечения биссектрис внутреннего угла C треугольника MCK и внешнего угла M этого же треугольника. То есть точка A – центр вневписанной окружности для этого треугольника. Следовательно, прямая, проходящая через третью вершину этого треугольника и точку A также будет биссектрисой внешнего угла K этого треугольника. Опять получаем те же 75^0.

Задание 9.5

В правильном десятиугольнике проведены все диагонали. Возле каждой вершины и возле каждой точки пересечения диагоналей поставлено число +1 (рассматриваются только сами диагонали, а не их продолжения). Разрешается одновременно изменить все знаки у чисел, стоящих на одной стороне или на одной диагонали. Можно ли с помощью нескольких таких операций изменить все знаки на противоположные?

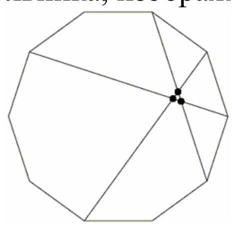
Количество баллов 7

Ответ:

нельзя.

Решение

Рассмотрим три диагонали десятиугольника, изображённые на рисунке.



Заметим, что через три отмеченные точки не проходит более ни одной диагонали. На каждом шаге меняется знак у чётного числа единиц, стоящих возле этих трёх точек. Поэтому возле них всегда будет нечётное число "плюс единиц". Следовательно, изменить все знаки невозможно.

Дополнительные критерии

Рассмотрена конфигурация, эквивалентная указанной на рисунке в решении, но решение не доведено до завершения – 4 балла