

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 10
класса (группа № 4)

2021/22 учебный год

Максимальное количество баллов — 8.

25 октября 2021 г.

1. **Вариант 1.** Даны два натуральных числа. Одно число увеличили на 3, а другое – уменьшили на 3. При этом их произведение увеличилось на 600. А на сколько уменьшится произведение, если сделать наоборот: первое число уменьшить на 3, а второе увеличить на 3?

Ответ. 618.

Решение. Пусть эти числа a и b . Тогда по условию $(a - 3)(b + 3) - ab = 600$. Раскроем скобки: $ab + 3a - 3b - 9 - ab = 600$, значит $a - b = 203$. Требуется найти разность $ab - (a + 3)(b - 3) = ab - ab + 3a - 3b + 9 = 3(a - b) + 9 = 3 \cdot 203 + 9 = 618$.

Вариант 2. Даны два натуральных числа. Одно число увеличили на 4, а другое – уменьшили на 4. При этом их произведение увеличилось на 600. А на сколько уменьшится произведение, если сделать наоборот: первое число уменьшить на 4, а второе увеличить на 4?

Ответ. 632.

Вариант 3. Даны два натуральных числа. Одно число увеличили на 5, а другое – уменьшили на 5. При этом их произведение увеличилось на 600. А на сколько уменьшится произведение, если сделать наоборот: первое число уменьшить на 5, а второе увеличить на 5?

Ответ. 650.

Вариант 4. Даны два натуральных числа. Одно число увеличили на 5, а другое – уменьшили на 5. При этом их произведение увеличилось на 500. А на сколько уменьшится произведение, если сделать наоборот: первое число уменьшить на 5, а второе увеличить на 5?

Ответ. 550.

Вариант 5. Даны два натуральных числа. Одно число увеличили на 4, а другое – уменьшили на 4. При этом их произведение увеличилось на 500. А на сколько уменьшится произведение, если сделать наоборот: первое число уменьшить на 4, а второе увеличить на 4?

Ответ. 532.

2. **Вариант 1.** На перекрёстке перпендикулярных дорог пересекаются шоссе, ведущее из Москвы в Казань и трасса из Владимира в Рязань. Дима и Толя выехали с постоянными скоростями из Москвы в Казань и из Владимира в Рязань соответственно. Когда Дима проезжал перекрёсток, Толе оставалось доехать до него 900 метров. Когда Толя проезжал перекрёсток, Дима был на

расстоянии 600 метров от перекрёстка. Сколько метров будет между мальчиками, когда Толя проедет 900 метров с момента пересечения перекрёстка?

Ответ. 1500.

Решение. Когда Толя проедет 900 метров, Дима проедет 600 метров, поэтому, в момент, когда Толя будет находиться на расстоянии 900 метров от перекрёстка, Дима будет находиться на расстоянии 1200 метров от перекрёстка. По теореме Пифагора, расстояние между мальчиками равно 1500 метров.

Вариант 2. На перекрёстке перпендикулярных дорог пересекаются шоссе, ведущее из Москвы в Казань и трасса из Владимира в Рязань. Дима и Толя выехали с постоянными скоростями из Москвы в Казань и из Владимира в Рязань соответственно. Когда Дима проезжал перекрёсток, Толе оставалось доехать до него 500 метров. Когда Толя проезжал перекрёсток, Дима был на расстоянии 600 метров от перекрёстка. Сколько метров будет между мальчиками, когда Толя проедет 500 метров с момента пересечения перекрёстка?

Ответ. 1300.

Вариант 3. На перекрёстке перпендикулярных дорог пересекаются шоссе, ведущее из Москвы в Казань и трасса из Владимира в Рязань. Дима и Толя выехали с постоянными скоростями из Москвы в Казань и из Владимира в Рязань соответственно. Когда Дима проезжал перекрёсток, Толе оставалось доехать до него 1500 метров. Когда Толя проезжал перекрёсток, Дима был на расстоянии 400 метров от перекрёстка. Сколько метров будет между мальчиками, когда Толя проедет 1500 метров с момента пересечения перекрёстка?

Ответ. 1700.

Вариант 4. На перекрёстке перпендикулярных дорог пересекаются шоссе, ведущее из Москвы в Казань и трасса из Владимира в Рязань. Дима и Толя выехали с постоянными скоростями из Москвы в Казань и из Владимира в Рязань соответственно. Когда Дима проезжал перекрёсток, Толе оставалось доехать до него 1200 метров. Когда Толя проезжал перекрёсток, Дима был на расстоянии 800 метров от перекрёстка. Сколько метров будет между мальчиками, когда Толя проедет 1200 метров с момента пересечения перекрёстка?

Ответ. 2000.

Вариант 5. На перекрёстке перпендикулярных дорог пересекаются шоссе, ведущее из Москвы в Казань и трасса из Владимира в Рязань. Дима и Толя выехали с постоянными скоростями из Москвы в Казань и из Владимира в Рязань соответственно. Когда Дима проезжал перекрёсток, Толе оставалось доехать до него 1500 метров. Когда Толя проезжал перекрёсток, Дима был на расстоянии 1000 метров от перекрёстка. Сколько метров будет между мальчиками, когда Толя проедет 1500 метров с момента пересечения перекрёстка?

Ответ. 2500.

3. **Вариант 1.** Петя и Маша по очереди достают из коробки конфеты. Маша взяла одну конфету, затем Петя достал 2 конфеты, Маша – 3 конфеты, Петя – 4 конфеты, и т.д. Когда количество конфет в коробке стало меньше необходимого для того, чтобы сделать очередной ход, все оставшиеся конфеты достались тому, чья очередь была брать конфеты. Сколько конфет получил Петя, если Маше досталась 101 конфета?

Ответ: 110.

Решение. Поскольку $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 100 < 101$, но $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 121 > 101$, то Маше досталась последняя конфета. Тогда Петя взял себе $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 110$ конфет.

Вариант 2. Петя и Маша по очереди достают из коробки конфеты. Маша взяла одну конфету, затем Петя достал 2 конфеты, Маша – 3 конфеты, Петя – 4 конфеты, и т.д. Когда количество конфет в коробке стало меньше необходимого для того, чтобы сделать очередной ход, все оставшиеся конфеты достались тому, чья очередь была брать конфеты. Сколько конфет получил Петя, если Маше досталась 122 конфеты?

Ответ: 132.

Вариант 3. Петя и Маша по очереди достают из коробки конфеты. Маша взяла одну конфету, затем Петя достал 2 конфеты, Маша – 3 конфеты, Петя – 4 конфеты, и т.д. Когда количество конфет в коробке стало меньше необходимого для того, чтобы сделать очередной ход, все оставшиеся конфеты достались тому, чья очередь была брать конфеты. Сколько конфет получил Петя, если Маше досталась 145 конфет?

Ответ: 156.

Вариант 4. Петя и Маша по очереди достают из коробки конфеты. Маша взяла одну конфету, затем Петя достал 2 конфеты, Маша – 3 конфеты, Петя – 4 конфеты, и т.д. Когда количество конфет в коробке стало меньше необходимого для того, чтобы сделать очередной ход, все оставшиеся конфеты достались тому, чья очередь была брать конфеты. Сколько конфет получил Петя, если Маше досталась 170 конфет?

Ответ: 182.

Вариант 5. Петя и Маша по очереди достают из коробки конфеты. Маша взяла одну конфету, затем Петя достал 2 конфеты, Маша – 3 конфеты, Петя – 4 конфеты, и т.д. Когда количество конфет в коробке стало меньше необходимого для того, чтобы сделать очередной ход, все оставшиеся конфеты достались тому, чья очередь была брать конфеты. Сколько конфет получил Петя, если Маше досталась 197 конфет?

Ответ: 210.

4. **Вариант 1.** Муравей, начиная с точки А идёт $1 + \frac{1}{10}$ см на север, потом $2 + \frac{2}{10}$ см на запад, потом $3 + \frac{3}{10}$ см на юг, потом $4 + \frac{4}{10}$ см на восток, потом $5 + \frac{5}{10}$ см на север, потом $6 + \frac{6}{10}$ см на запад и т.д. Через 1000 шагов муравей оказался в точке В. Найдите расстояние между точками А и В в сантиметрах по прямой. В ответ запишите квадрат найденного расстояния.

Ответ: 605000.

Решение. Разобьём 1000 шагов на четвёрки. После каждой четвёрки муравей сместится на юго-восток, относительно текущего положения, на расстояние, равное диагонали квадрата со стороной 2, т.е. на $\sqrt{2,2^2 + 2,2^2} = \sqrt{9,68}$. После 250 таких четвёрок муравей окажется на расстоянии $250 \cdot \sqrt{9,68}$ от точки А. Квадрат этого расстояния равен $250^2 \cdot 9,68 = 605000$.

Вариант 2. Муравей, начиная с точки А идёт $1 + \frac{1}{10}$ см на север, потом $2 + \frac{2}{10}$ см на запад, потом $3 + \frac{3}{10}$ см на юг, потом $4 + \frac{4}{10}$ см на восток, потом $5 + \frac{5}{10}$ см на север, потом $6 + \frac{6}{10}$ см на запад и т.д. Через 2000 шагов муравей оказался в точке В. Найдите расстояние между точками А и В в сантиметрах по прямой. В ответ запишите квадрат найденного расстояния.

Ответ: 2420000.

Вариант 3. Муравей, начиная с точки А идёт $1 + \frac{1}{10}$ см на север, потом $2 + \frac{2}{10}$ см на запад, потом $3 + \frac{3}{10}$ см на юг, потом $4 + \frac{4}{10}$ см на восток, потом $5 + \frac{5}{10}$ см на север, потом $6 + \frac{6}{10}$ см на запад и т.д. Через 3000 шагов муравей оказался в точке В. Найдите расстояние между точками А и В в сантиметрах по прямой. В ответ запишите квадрат найденного расстояния.

Ответ: 5445000.

Вариант 4. Муравей, начиная с точки А идёт $1 + \frac{1}{10}$ см на север, потом $2 + \frac{2}{10}$ см на запад, потом $3 + \frac{3}{10}$ см на юг, потом $4 + \frac{4}{10}$ см на восток, потом $5 + \frac{5}{10}$ см на север, потом $6 + \frac{6}{10}$ см на запад и т.д. Через 500 шагов муравей оказался в точке В. Найдите расстояние между точками А и В в сантиметрах по прямой. В ответ запишите квадрат найденного расстояния.

Ответ: 151250.

Вариант 5. Муравей, начиная с точки А идёт $1 + \frac{1}{10}$ см на север, потом $2 + \frac{2}{10}$ см на запад, потом $3 + \frac{3}{10}$ см на юг, потом $4 + \frac{4}{10}$ см на восток, потом $5 + \frac{5}{10}$ см на север, потом $6 + \frac{6}{10}$ см на запад и т.д. Через 4000 шагов муравей оказался в точке В. Найдите расстояние между точками А и В в сантиметрах по прямой. В ответ запишите квадрат найденного расстояния.

Ответ: 9680000.

5. Вариант 1.

Известно, что уравнения $x^2 + (2a - 5)x + a^2 + 1 = 0$ и $x^3 + (2a - 5)x^2 + (a^2 + 1)x + a^2 - 4 = 0$ имеют общие корни. Найдите сумму этих корней.

Ответ: 9.

Решение. Левая часть второго уравнения получается из левой части первого уравнения умножением на x и прибавлением выражения $a^2 - 4$. Значит, $a^2 - 4 = 0$, откуда $a = 2$ или $a = -2$. Если $a = 2$, то первое уравнение корней не имеет. Значит, $a = -2$, и тогда получаем, что первое уравнение имеет вид: $x^2 - 9x + 5 = 0$. По теореме Виета находим, что искомая сумма равна 9.

Вариант 2.

Известно, что уравнения $x^2 + (2a - 5)x + a^2 + 1 = 0$ и $x^3 + (2a - 5)x^2 + (a^2 + 1)x + a^2 - 9 = 0$ имеют общие корни. Найдите сумму этих корней.

Ответ: 11.

Вариант 3.

Известно, что уравнения $x^2 + (2a - 5)x + a^2 + 1 = 0$ и $x^3 + (2a - 5)x^2 + (a^2 + 1)x + a^2 - 16 = 0$ имеют общие корни. Найдите сумму этих корней.

Ответ: 13.

Вариант 4.

Известно, что уравнения $x^2 + (2a - 5)x + a^2 + 1 = 0$ и $x^3 + (2a - 5)x^2 + (a^2 + 1)x + a^2 - 25 = 0$ имеют общие корни. Найдите сумму этих корней.

Ответ: 15.

Вариант 5.

Известно, что уравнения $x^2 + (2a - 5)x + a^2 + 1 = 0$ и $x^3 + (2a - 5)x^2 + (a^2 + 1)x + a^2 - 36 = 0$ имеют общие корни. Найдите сумму этих корней.

Ответ: 17.

6. **Вариант 1.** Гриша задумал такой набор из 10 различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое равно 16. Каково максимально возможное значение самого большого из задуманных им чисел?

Ответ: 115.

Решение. Сумма данных чисел равна $10 \cdot 16 = 160$. Так как все числа различны, то сумма 9 наименьших из них не меньше, чем $1 + 2 + \dots + 9 = 45$. Следовательно, наибольшее число не может быть больше чем $160 - 45 = 115$. Это возможно: $(1 + 2 + \dots + 9 + 115) : 10 = 16$.

Вариант 2. Гриша задумал такой набор из 10 различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое равно 17. Каково максимально возможное значение самого большого из задуманных им чисел?

Ответ: 125.

Вариант 3. Гриша задумал такой набор из 10 различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое равно 18. Каково максимально возможное значение самого большого из задуманных им чисел?

Ответ: 135.

Вариант 4. Гриша задумал такой набор из 10 различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое равно 19. Каково максимально возможное значение самого большого из задуманных им чисел?

Ответ: 145.

Вариант 5. Гриша задумал такой набор из 10 различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое равно 20. Каково максимально возможное значение самого большого из задуманных им чисел?

Ответ. 155.

7. **Вариант 1.** Рома решил составить свою таблицу умножения. Строки соответствуют числам 12, 13, 14, ..., 60, а столбцы – числам 15, 16, 17, ..., 40. В ячейки таблицы он вписал произведения пар чисел строки и столбца. Сколько из этих произведений будут чётными числами?

Ответ. 962.

Решение. Заметим, что произведение двух чисел будет нечётным, если оба сомножителя нечётны, и чётным в остальных случаях. Всего в таблице записано $49 \cdot 26$ произведений. Заметим, что среди чисел от 12 до 60 будет 24 нечётных числа, а среди чисел от 15 до 40 – 13 нечётных чисел. Поэтому в таблице будет $24 \cdot 13$ нечётных произведений. Остальные $49 \cdot 26 - 24 \cdot 13 = 962$ будут чётными.

- Вариант 2.** Рома решил составить свою таблицу умножения. Строки соответствуют числам 10, 11, 12, ..., 50, а столбцы – числам 13, 14, 15, ..., 40. В ячейки таблицы он вписал произведения пар чисел строки и столбца. Сколько из этих произведений будут чётными числами?

Ответ. 868.

- Вариант 3.** Рома решил составить свою таблицу умножения. Строки соответствуют числам 14, 15, 16, ..., 60, а столбцы – числам 11, 12, 13, ..., 40. В ячейки таблицы он вписал произведения пар чисел строки и столбца. Сколько из этих произведений будут чётными числами?

Ответ. 1065.

- Вариант 4.** Рома решил составить свою таблицу умножения. Строки соответствуют числам 10, 11, 12, ..., 60, а столбцы – числам 15, 16, 17, ..., 50. В ячейки таблицы он вписал произведения пар чисел строки и столбца. Сколько из этих произведений будут чётными числами?

Ответ. 1386.

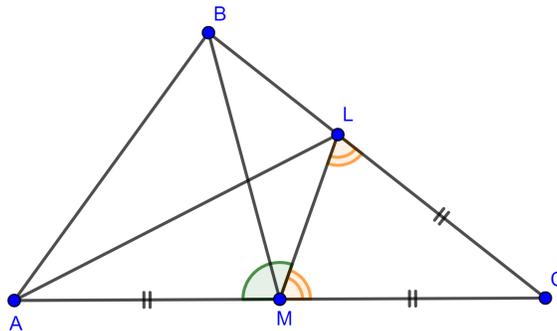
- Вариант 5.** Рома решил составить свою таблицу умножения. Строки соответствуют числам 12, 13, 14, ..., 50, а столбцы – числам 13, 14, 15, ..., 60. В ячейки таблицы он вписал произведения пар чисел строки и столбца. Сколько из этих произведений будут чётными числами?

Ответ. 1416.

8. **Вариант 1.** В треугольнике ABC проведены биссектриса AL и медиана BM . Оказалось, что $AB = 2BL$. Чему равен угол BCA , если $\angle LMA = 127^\circ$?

Ответ. 74° .

Решение.



По свойству биссектрисы, $\frac{AC}{CL} = \frac{AB}{BL} = \frac{2}{1}$, поэтому $AC = 2CL$. Т.к. M – середина AC , то $AM = MC = CL$. В равнобедренном треугольнике CML угол C равен $180^\circ - 2\angle CML = 180^\circ - 2(180^\circ - \angle LMA) = 2\angle LMA - 180^\circ = 74^\circ$.

- Вариант 2.** В треугольнике ABC проведены биссектриса AL и медиана BM . Оказалось, что $AB = 2BL$. Чему равен угол BCA , если $\angle LMA = 129^\circ$?

Ответ. 78° .

Вариант 3. В треугольнике ABC проведены биссектриса AL и медиана BM . Оказалось, что $AB = 2BL$. Чему равен угол BCA , если $\angle LMA = 131^\circ$?

Ответ. 82° .

Вариант 4. В треугольнике ABC проведены биссектриса AL и медиана BM . Оказалось, что $AB = 2BL$. Чему равен угол BCA , если $\angle LMA = 133^\circ$?

Ответ. 86° .

Вариант 5. В треугольнике ABC проведены биссектриса AL и медиана BM . Оказалось, что $AB = 2BL$. Чему равен угол BCA , если $\angle LMA = 123^\circ$?

Ответ. 66° .