Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 11 класса (группа № 4)

2021/22 учебный год

Максимальное количество баллов — 8.

25 октября 2021 г.

11 класс

1. **Вариант 1.** Петя задумал два числа и написал их произведение. После этого первое из задуманных чисел он уменьшил на 3, а другое – увеличил на 3. Оказалось, что произведение при этом увеличилось на 900. На сколько бы уменьшилось произведение, если бы Петя поступил наоборот: первое число увеличил на 3, а второе – уменьшил на 3?

   Ответ. 918.

   Решение. Пусть эти числа a и b. Тогда по условию $(a-3)(b+3)-ab=600$. Раскроем скобки: $ab+3a-3b-9-ab=900$, значит $a-b=303$. Требуется найти разность $ab-(a+3)(b-3)=ab-ab+3a-3b+9=3(a-b)+9=3\cdot 303+9=918$.

   Вариант 2. Петя задумал два числа и написал их произведение. После этого первое из задуманных чисел он уменьшил на 4, а другое – увеличил на 4. Оказалось, что произведение при этом увеличилось на 900. На сколько бы уменьшилось произведение, если бы Петя поступил наоборот: первое число увеличил на 4, а второе – уменьшил на 4?

   Ответ. 932.

   Вариант 3. Петя задумал два числа и написал их произведение. После этого первое из задуманных чисел он уменьшил на 5, а другое – увеличил на 5. Оказалось, что произведение при этом увеличилось на 900. На сколько бы уменьшилось произведение, если бы Петя поступил наоборот: первое число увеличил на 5, а второе – уменьшил на 5?

   Ответ. 950.

   Вариант 4. Петя задумал два числа и написал их произведение. После этого первое из задуманных чисел он уменьшил на 4, а другое – увеличил на 4. Оказалось, что произведение при этом увеличилось на 800. На сколько бы уменьшилось произведение, если бы Петя поступил наоборот: первое число увеличил на 4, а второе – уменьшил на 4?

   Ответ. 832.

   Вариант 5. Петя задумал два числа и написал их произведение. После этого первое из задуманных чисел он уменьшил на 5, а другое – увеличил на 5. Оказалось, что произведение при этом увеличилось на 800. На сколько бы уменьшилось произведение, если бы Петя поступил наоборот: первое число увеличил на 5, а второе – уменьшил на 5?

   Ответ. 850.

2. **Вариант 1.** На перекрёстке перпендикулярных дорог пересекаются шоссе, ведущее из Москвы в Казань и трасса из Владимира в Рязань. Дима и Толя выехали с постоянными скоростями из Москвы в Казань и из Владимира в Рязань соответственно. Когда Дима проехал перекрёсток Толе оставалось доехать до него 3500 метров. Когда Толя проехал перекрёсток Дима был от него на расстоянии 4200 метров. Сколько метров будет между мальчиками, когда Дима проедет 4200 метров с момента пересечения перекрёстка Толей?

   Ответ. 9100.

   Решение. Когда Толя проедет 3500 метров, Дима проедет 4200 метров, поэтому, в момент, когда Дима будет находиться на расстоянии 8400 метров после перекрёстка, Толя будет находиться на расстоянии 3500 метров после перекрёстка. По теореме Пифагора, расстояние между мальчиками равно 9100 метров.

   Вариант 2. На перекрёстке перпендикулярных дорог пересекаются шоссе, ведущее из Москвы в Казань и трасса из Владимира в Рязань. Дима и Толя выехали с постоянными скоростями из Москвы в Казань и из Владимира в Рязань соответственно. Когда Дима проехал перекрёсток Толе оставалось доехать до него 5500 метров. Когда Толя проехал перекрёсток Дима был от него на расстоянии 6600 метров. Сколько метров будет между мальчиками, когда Дима проедет 6600 метров с момента пересечения перекрёстка Толей?

   Ответ. 14300.

   Вариант 3. На перекрёстке перпендикулярных дорог пересекаются шоссе, ведущее из Москвы в Казань и трасса из Владимира в Рязань. Дима и Толя выехали с постоянными скоростями из Москвы в Казань и из Владимира в Рязань соответственно. Когда Дима проехал перекрёсток Толе оставалось доехать до него 2700 метров. Когда Толя проехал перекрёсток Дима был от него на расстоянии 6000 метров. Сколько метров будет между мальчиками, когда Дима проедет 6000 метров с момента пересечения перекрёстка Толей?

   Ответ. 12300.

   Вариант 4. На перекрёстке перпендикулярных дорог пересекаются шоссе, ведущее из Москвы в Казань и трасса из Владимира в Рязань. Дима и Толя выехали с постоянными скоростями из Москвы в Казань и из Владимира в Рязань соответственно. Когда Дима проехал перекрёсток Толе оставалось доехать до него 2100 метров. Когда Толя проехал перекрёсток Дима был от него на расстоянии 3600 метров. Сколько метров будет между мальчиками, когда Дима проедет 3600 метров с момента пересечения перекрёстка Толей?

   Ответ. 7500.

   Вариант 5. На перекрёстке перпендикулярных дорог пересекаются шоссе, ведущее из Москвы в Казань и трасса из Владимира в Рязань. Дима и Толя выехали с постоянными скоростями из Москвы в Казань и из Владимира в Рязань соответственно. Когда Дима проехал перекрёсток Толе оставалось доехать до него 3500 метров. Когда Толя проехал перекрёсток Дима был от него на расстоянии 6000 метров. Сколько метров будет между мальчиками, когда Дима проедет 6000 метров с момента пересечения перекрёстка Толей?

   Ответ. 12500.

3. **Вариант 1.** Найдите наибольший корень уравнения
   $(x+1)(x+2)-(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)-(x+4)(x+5)+\cdots-(x+1000)(x+1001)=0.$

   Ответ. -501.

   Решение. Разобьём слагаемые на пары стоящих рядом и вынесем общий множитель за скобки, получим $(x+2)(x+1-x-3)+\cdots+(x+1000)(x+999-x-1001)=-2\cdot(x+2+x+4+\cdots+x+1000)=-2\cdot(500x+\frac{2+1000}{2}\cdot 500)=-1000\cdot(x+501)=0$. Откуда, $x=-501$ — единственный корень.

   Вариант 2. Найдите наибольший корень уравнения
   $(x+1)(x+2)-(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)-(x+4)(x+5)+\cdots-(x+2000)(x+2001)=0.$

   Ответ. -1001.

Вариант 3. Найдите наибольший корень уравнения
$(x+1)(x+2)-(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)-(x+4)(x+5)+\cdots-(x+3000)(x+3001)=0.$

Ответ. -1501.

Вариант 4. Найдите наибольший корень уравнения
$(x+1)(x+2)-(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)-(x+4)(x+5)+\cdots-(x+4000)(x+4001)=0.$

Ответ. -2001.

Вариант 5. Найдите наибольший корень уравнения
$(x+1)(x+2)-(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)-(x+4)(x+5)+\cdots-(x+5000)(x+5001)=0.$

Ответ. -2501.

4. **Вариант 1.** Три золотодобытчика — Вася, Миша и Гриша — накопали по мешку золота (каждый себе). По пути домой они встретили старика Хоттабыча. Он предложил им на выбор:
1. Увеличить на 10% добычу Васи и на 20% добычу Миши;
2. Увеличить на 10% добычу Миши и уменьшить на 10% добычу Гриши;
3. Увеличить на 40% добычу Гриши и на 20% добычу Васи.
Гриша, самый сообразительный из них, посчитал, что в первом случае их суммарная добыча увеличится на 1 кг; во втором случае – уменьшится на 0,5 кг; в третьем случае – увеличится на 4 кг. Какая была суммарная добыча друзей (в килограммах) до встречи с Хоттабычем?

Ответ. 15.

Решение. Обозначим добычу Васи, Миши и Гриши за x, y, z соответственно. Тогда, $0,1x+0,2y=1; 0,1y-0,1z=-0,5; 0,4z+0,2x=4$. Сложив уравнения, получим $0,3(x+y+z)=4,5$, откуда $x+y+z=15$.

Вариант 2. Три золотодобытчика — Вася, Миша и Гриша — накопали по мешку золота (каждый себе). По пути домой они встретили старика Хоттабыча. Он предложил им на выбор:
1. Увеличить на 10% добычу Васи и на 20% добычу Миши;
2. Увеличить на 10% добычу Миши и уменьшить на 10% добычу Гриши;
3. Увеличить на 40% добычу Гриши и на 20% добычу Васи.
Гриша, самый сообразительный из них, посчитал, что в первом случае их суммарная добыча увеличится на 1,1 кг; во втором случае – уменьшится на 0,5 кг; в третьем случае – увеличится на 4,2 кг. Какая была суммарная добыча друзей (в килограммах) до встречи с Хоттабычем?

Ответ. 16.

Вариант 3. Три золотодобытчика — Вася, Миша и Гриша — накопали по мешку золота (каждый себе). По пути домой они встретили старика Хоттабыча. Он предложил им на выбор:
1. Увеличить на 10% добычу Васи и на 20% добычу Миши;
2. Увеличить на 10% добычу Миши и уменьшить на 10% добычу Гриши;
3. Увеличить на 40% добычу Гриши и на 20% добычу Васи.
Гриша, самый сообразительный из них, посчитал, что в первом случае их суммарная добыча увеличится на 1,2 кг; во втором случае – уменьшится на 0,5 кг; в третьем случае – увеличится на 4,4 кг. Какая была суммарная добыча друзей (в килограммах) до встречи с Хоттабычем?

Ответ. 17.

Вариант 4. Три золотодобытчика — Вася, Миша и Гриша — накопали по мешку золота (каждый себе). По пути домой они встретили старика Хоттабыча. Он предложил им на выбор:
1. Увеличить на 10% добычу Васи и на 20% добычу Миши;
2. Увеличить на 10% добычу Миши и уменьшить на 10% добычу Гриши;
3. Увеличить на 40% добычу Гриши и на 20% добычу Васи.
Гриша, самый сообразительный из них, посчитал, что в первом случае их суммарная добыча увеличится на 1,3 кг; во втором случае – уменьшится на 0,5 кг; в третьем случае – увеличится на 4,6 кг. Какая была суммарная добыча друзей (в килограммах) до встречи с Хоттабычем?

Ответ. 18.

Вариант 5. Три золотодобытчика — Вася, Миша и Гриша — накопали по мешку золота (каждый себе). По пути домой они встретили старика Хоттабыча. Он предложил им на выбор:
1. Увеличить на 10% добычу Васи и на 20% добычу Миши;
2. Увеличить на 10% добычу Миши и уменьшить на 10% добычу Гриши;
3. Увеличить на 40% добычу Гриши и на 20% добычу Васи.
Гриша, самый сообразительный из них, посчитал, что в первом случае их суммарная добыча увеличится на 1,4 кг; во втором случае – уменьшится на 0,5 кг; в третьем случае – увеличится на 4,8 кг. Какая была суммарная добыча друзей (в килограммах) до встречи с Хоттабычем?

Ответ. 19.

5. **Вариант 1**

Известно, что $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma = \sqrt{\frac{1}{5}}$, $sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = \sqrt{\frac{4}{5}}$. Найдите $cos(\alpha - \beta) + cos(\beta - \gamma) + cos(\gamma - \alpha)$.
Ответ: -1.
Решение. Рассматриваем выражение $(cos\alpha+cos\beta+cos\gamma)^2+(sin\alpha+sin\beta+sin\gamma)^2$ и раскрываем в нем скобки: $cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma+2(cos\alpha\cdot cos\beta+cos\alpha\cdot cos\gamma+cos\beta\cdot cos\gamma)+sin^2\alpha+sin^2\beta+sin^2\gamma+2(sin\alpha\cdot sin\beta+sin\alpha\cdot sin\gamma+sin\beta\cdot sin\gamma)$. Преобразовываем, затем применяем основное тригонометрическое тождество и формулу косинуса разности: $(cos^2\alpha+sin^2\alpha)+(cos^2\beta+sin^2\beta)+(cos^2\gamma+sin^2\gamma)+2(cos\alpha\cdot cos\beta+sin\alpha\cdot sin\beta)+2(cos\alpha\cdot cos\gamma+sin\alpha\cdot sin\gamma)+2(cos\beta\cdot cos\gamma+sin\beta\cdot sin\gamma) = 3+2(cos(\alpha-\beta)+cos(\beta-\gamma)+cos(\gamma-\alpha))$. Подставляя в начальное выражение $cos\alpha+cos\beta+cos\gamma = \sqrt{\frac{1}{5}}$, $sin\alpha+sin\beta+sin\gamma = \sqrt{\frac{4}{5}}$ получаем уравнение: $\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2 = 3+2(cos(\alpha-\beta)+cos(\beta-\gamma)+cos(\gamma-\alpha))$, откуда находим ответ.

Вариант 2

Известно, что $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma = \sqrt{\frac{10}{7}}$, $sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = \sqrt{\frac{11}{7}}$. Найдите $cos(\alpha - \beta) + cos(\beta - \gamma) + cos(\gamma - \alpha)$.
Ответ: 0.

Вариант 3

Известно, что $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = \sqrt{\frac{17}{3}}$. Найдите $cos(\alpha - \beta) + cos(\beta - \gamma) + cos(\gamma - \alpha)$.
Ответ: 3.

6. **Вариант 1**

В начале действий в коробке было 20 шаров трех цветов: белые, синие и красные. Если мы удвоим количество синих шаров, то вероятность вытащить белый шар станет на $\frac{1}{25}$ меньше, чем была изначально. Если мы уберем все белые шары, то вероятность вытащить синий шар станет на $\frac{1}{16}$ больше, чем вероятность вытащить синий шар в начале. Сколько белых шаров лежало в коробке?

Ответ. 4.

Решение. Пусть в коробке a белых шаров, b синих шаров и c красных шаров. Составим уравнения:

$$a + b + c = 20, \tag{1}$$

$$\frac{a}{20} = \frac{a}{20+b} + \frac{1}{25}, \tag{2}$$

$$\frac{b}{20} + \frac{1}{16} = \frac{b}{20-a}. \tag{3}$$

Преобразуем второе: $\frac{ab}{20(20+b)} = \frac{1}{25}$ и третье: $\frac{1}{16} = \frac{ab}{20(20-a)}$. Наконец $\frac{20+b}{25} = \frac{20-a}{16}$ и, подставляя во второе, после упрощения получаем квадратное уравнение на a (при $a \neq 20$): $\frac{a}{20} = \frac{16a}{25(20-a)} + \frac{1}{25} \Leftrightarrow 100a - 5a^2 = 64a + 80 - 4a \Leftrightarrow a^2 - 8a + 16 = 0 \Leftrightarrow a = 4$. Тогда имеем из первого и второго: $b = 5, c = 11$.

Вариант 2

В начале действий в коробке было 30 шаров трех цветов: белые, синие и красные. Если мы удвоим количество синих шаров, то вероятность вытащить белый шар станет на $\frac{1}{36}$ меньше, чем была изначально. Если мы уберем все белые шары, то вероятность вытащить синий шар станет на $\frac{1}{25}$ больше, чем вероятность вытащить синий шар в начале. Сколько белых шаров лежало в коробке?

Ответ. 5.

Вариант 3

В начале действий в коробке было 42 шара трех цветов: белые, синие и красные. Если мы удвоим количество синих шаров, то вероятность вытащить белый шар станет на $\frac{1}{49}$ меньше, чем была изначально. Если мы уберем все белые шары, то вероятность вытащить синий шар станет на $\frac{1}{36}$ больше, чем вероятность вытащить синий шар в начале. Сколько белых шаров лежало в коробке?

Ответ. 6.

Вариант 4

В начале действий в коробке было 56 шаров трех цветов: белые, синие и красные. Если мы удвоим количество синих шаров, то вероятность вытащить белый шар станет на $\frac{1}{64}$ меньше, чем была изначально. Если мы уберем все белые шары, то вероятность вытащить синий шар станет на $\frac{1}{49}$ больше, чем вероятность вытащить синий шар в начале. Сколько белых шаров лежало в коробке?

Ответ. 7.

Вариант 5

В начале действий в коробке было 72 шара трех цветов: белые, синие и красные. Если мы удвоим количество синих шаров, то вероятность вытащить белый шар станет на $\frac{1}{81}$ меньше, чем была изначально. Если мы уберем все белые шары, то вероятность вытащить синий шар станет на $\frac{1}{64}$ больше, чем вероятность вытащить синий шар в начале. Сколько белых шаров лежало в коробке?

Ответ. 8.

7. **Вариант 1**

Из единичных кубиков собрали большой параллелепипед со сторонами, большими 4. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 6 соседей, равно 836. Найдите количество кубиков, у которых не более четырех соседей.

Ответ. 144.

Решение. Пусть a, b и c - длины сторон большого параллелепипеда. Тогда, кубиков ровно с 6 соседями: $(a-2)(b-2)(c-2)$. Поскольку каждый из множителей $a-2$, $b-2$ и $c-2$ больше 2 и их произведение равно произведению четырех простых чисел 2, 2, 11 и 19 имеем, что числа $a-2$, $b-2$ и $c-2$ и есть 4, 11 и 19 в некотором порядке. Количество кубиков, у которых ровно 4 соседа равно $4 \cdot (a-2+b-2+c-2)$ (поскольку каждый такой кубик примыкает ровно к одному ребру). Таким образом получаем ответ: $4 \cdot (4+11+19)+8=144$.

Вариант 2

Из единичных кубиков собрали большой параллелепипед со сторонами, большими 4. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 6 соседей равно, 1564. Найдите количество кубиков, у которых не более четырех соседей.

Ответ. 184.

Вариант 3

Из единичных кубиков собрали большой параллелепипед со сторонами, большими 4. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 6 соседей, равно 812. Найдите количество кубиков, у которых не более четырех соседей.

Ответ. 168.

Вариант 4

Из единичных кубиков собрали большой параллелепипед со сторонами, большими 4. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 6 соседей, равно 1012. Найдите количество кубиков, у которых не более четырех соседей.

Ответ. 160.

Вариант 5

Из единичных кубиков собрали большой параллелепипед со сторонами, большими 4. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 6 соседей, равно 868. Найдите количество кубиков, у которых не более четырех соседей.

Ответ. 176.

8. **Вариант 1**

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, SA – высота пирамиды. Пусть M и N – середины ребер SC и AD. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника BSA, если $MN = 3$?

Ответ. 9.

Решение. Пусть O – центр квадрата $ABCD$. Тогда MO – средняя линия треугольника SAC, поэтому $SA = 2MO$. Так же ON – средняя линия треугольника BDA, поэтому $AB = 2ON$. Следовательно, $SA^2 + AB^2 = 4(MO^2 + ON^2) = MN^2 = 36$. Пусть $SA = x, AB = y$. Из формулы $S = 0,5SA \cdot AB = 0,5xy$, равенства $x^2 + y^2 = SB^2 = 36$ и неравенства $x^2 + y^2 \geq 2xy$ следует, что площадь треугольника максимальна, когда $2xy = x^2 + y^2$ и она равна 9.

Вариант 2

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, SA – высота пирамиды. Пусть M и N – середины ребер SC и AD. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника BSA, если $MN = 4$?

Ответ. 16.

Вариант 3

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, SA – высота пирамиды. Пусть M и N – середины ребер SC и AD. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника BSA, если $MN = 5$?

Ответ. 25.

Вариант 4

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, SA – высота пирамиды. Пусть M и N – середины ребер SC и AD. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника BSA, если $MN = 6$?

Ответ. 36.

Вариант 5

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, SA – высота пирамиды. Пусть M и N – середины ребер SC и AD. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника BSA, если $MN = 2$?

Ответ. 4.