

Всероссийская олимпиада школьников 2021/2022 уч. г.
Муниципальный этап
Математика
11 класс

Общее время выполнения работы – 3 часа 55 минут (235 минут).

Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Задание 11.1

При каких значениях c числа $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ являются корнями квадратного уравнения:

$$10x^2 - 7x - c = 0 \quad (\alpha - \text{некоторый угол})?$$

Количество баллов 7

Задание 11.2

Известно, что среди членов некоторой арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ есть числа a_1^2, a_2^2, a_3^2 .

Докажите, что эта прогрессия состоит из целых чисел.

Количество баллов 7

Задание 11.3

Даны две одинаковые шестерёнки с 14 зубьями каждая. Их наложили друг на друга так, что зубья совпали (так что проекция на плоскость выглядит как одна шестерёнка). После этого четыре пары совпадающих зубьев выпилили. Всегда ли можно повернуть эти шестерёнки друг относительно друга так, чтобы проекция на плоскость выглядела как одна целая шестерёнка? (Шестерёнки можно поворачивать, но нельзя переворачивать.)

Количество баллов 7

Задание 11.4

Прямоугольник размером 7×9 разделен на квадраты размером 1×1 . Центральный квадрат закрашен. Доказать, что нельзя через центры всех незакрашенных квадратов провести ломанную линию так, что каждое звено соединяет центры соседних по стороне квадратов не проходя более одного раза через каждый из них.

Количество баллов 7

Задание 11.5

Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке C' . Вписанная окружность треугольника ACC' касается сторон AB и AC в точках C_1, B_1 . Вписанная окружность треугольника BCC' , касается сторон AB и BC в точках C_2, A_2 . Докажите, что прямые B_1C_1, A_2C_2 и CC' пересекаются в одной точке.

Количество баллов 7