

11 класс

1. Докажите, что произведение n положительных чисел с фиксированной суммой максимально, когда они все равны между собой.

2. Найдите все возможные пары простых чисел $(p; q)$ такие, что уравнение

$$x^4 + px^3 - q = 0$$

имеет целый корень.

3. В трёхмерном пространстве задана евклидова система координат $Oxyz$. Точки кривой имеют координаты $(\sin \varphi, \cos \varphi, \sin \varphi)$, где φ пробегает отрезок $[0; 2\pi]$. Докажите, что все точки кривой лежат в одной плоскости.

4. В множестве, состоящем из n элементов, выделено 2^{n-1} подмножеств, любые три из которых пересекаются (есть хотя бы один элемент, принадлежащий этим трём множествам). Докажите, что все они имеют общий элемент.

5. В окружности с центром O проведен диаметр MN , отмечены точка K – середина дуги MN , точка E – середина хорды MK и точка B – середина дуги KN , проведена хорда AB , которая проходит через точку E . На отрезке AB , как на стороне, построен прямоугольник $ABCD$ так, что его вершины C и D тоже лежат на окружности. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если диаметр окружности равен d .