Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 4-11 классов (группа №1)

2021/22 учебный год

Максимальное количество баллов — 8.

Содержание

4 класс

Задача 4.1. У Кощея есть три сундука.

- На первом написано: «Тут лежат золотые монеты».
- На втором написано: «Тут лежат серебряные монеты».
- На третьем написано: «Тут лежат золотые или серебряные монеты».

Один из сундуков он заполнил только золотыми монетами, другой — только серебряными, оставшийся — только медными. Все надписи оказались неверными. Что где лежит?

Постройте соответствие.

- В первом сундуке лежат
- Во втором сундуке лежат
- В третьем сундуке лежат

- золотые монеты.
- серебряные монеты.
- медные монеты.

Ответ: В первом сундуке лежат серебряные монеты, во втором — золотые, в третьем — медные.

Решение. Поскольку на третьем сундуке неверная надпись, то в нём могут лежать только медные монеты. В первом сундуке лежат ни золотые, ни медные монеты, значит, там лежат серебряные монеты. Тогда во втором сундуке лежат золотые монеты. □

Задача 4.2. Вика вписала в клетки таблицы 3×3 числа от 1 до 9 так, что сумма любых двух чисел в соседних по стороне клетках меньше 12. Хулиган Андрей стёр все чётные числа: 2, 4, 6 и 8.

Помогите Вике восстановить, где какое число стояло.

A	**1**	**9**
3	**5**	D
B	C	**7**

Постройте соответствие.

- В квадрате A
- В квадрате B
- В квадрате C
- В квадрате D

- стоит число 2.
- стоит число 4.
- стоит число 6.
- стоит число 8.

Ответ: $A = 8, B = 6, C = 4, D = 2$.

Решение. Поскольку сумма чисел 9 и D меньше 12, то D может быть равно только 2. Поскольку сумма чисел 7 и $C \neq 2$ меньше 12, то C может быть равно только 4. Поскольку сумма чисел $C = 4$ и B меньше 12, и B равно 6 или 8, то B может быть равно только 6. Тогда оставшееся число A равно 8. Несложно видеть, что полученная расстановка чисел в таблице удовлетворяет всем условиям задачи.

8	**1**	**9**
3	**5**	**2**
6	**4**	**7**

□

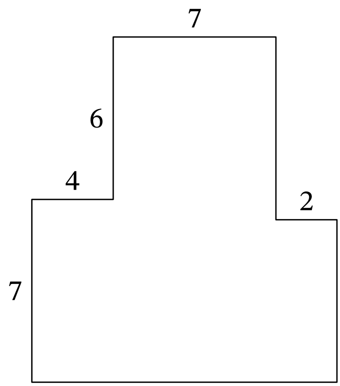
Задача 4.3. Все места за круглым столом короля Артура пронумерованы по часовой стрелке. Между соседними местами расстояния одинаковые.

Однажды король Артур сел на место с номером 10, а сэр Ланселот сел прямо напротив него на место с номером 29. Сколько всего мест за круглым столом?

Ответ: 38.

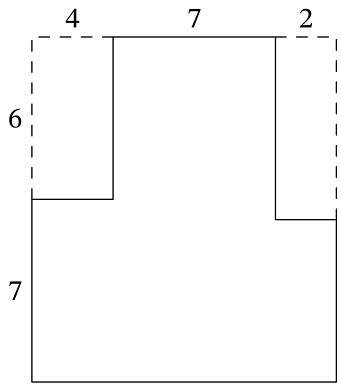
Решение. По одной из сторон стола между Артуром и Ланселотом находятся места с номерами $11, 12, \ldots, 28$ — всего ровно 18 мест. Поскольку эти двое сидят в точности напротив друг друга, то по другую сторону стола также находится 18 мест. Значит, всего мест за столом $18 + 18 + 1 + 1 = 38$. □

Задача 4.4. На схеме нарисован веломаршрут по парку, а также длины некоторых его участков в километрах. Сколько километров составляет длина всего веломаршрута?



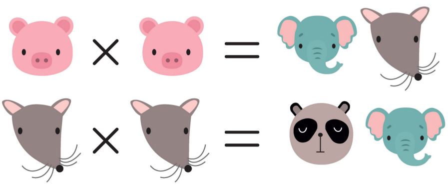
Ответ: 52.

Решение. Проведём 4 прямые: через самый верхний и самый нижний горизонтальные участки, а также через самый левый и самый правый вертикальные участки. Представим себе новый веломаршрут, который идёт только по этим четырём линиям, т. е. по контуру прямоугольника в пересечении этих четырёх прямых. Легко видеть, что длина этого нового маршрута совпадает с длиной исходного.



Найдём длину нового веломаршрута. Верхняя (как и нижняя) горизонтальная сторона получившегося прямоугольника составляет $4 + 7 + 2 = 13$ км, а левая (как и правая) вертикальная сторона составляет $6+7 = 13$ км. Значит, общая длина маршрута составляет $13 + 13 + 13 + 13 = 52$ км. □

Задача 4.5. Цифры надели маски (одинаковые цифры — в одинаковых масках, разные — в разных). За какой маской какая цифра спряталась?



Под маской слона спрятана цифра:

Под маской мышки спрятана цифра:

Под маской свинки спрятана цифра:

Под маской панды спрятана цифра:

Ответ: Цифра «слона» — это 6, цифра «мышки» — это 4, цифра «свинки» — это 8, цифра «панды» — это 1.

Решение. В обоих примерах произведение двух одинаковых цифр даёт двузначное число, оканчивающееся не на ту же цифру. Перечислим все варианты того, как такое вообще возможно:

$$4 \cdot 4 = 16, \quad 7 \cdot 7 = 49, \quad 8 \cdot 8 = 64, \quad 9 \cdot 9 = 81.$$

То, что цифра «мышки», умноженная на себя, оканчивается на цифру «слона», означает, что эти две цифры имеют одинаковую чётность (либо обе чётные, либо обе нечётные). Следовательно, в первом примере в правой части находится двузначное число из цифр одинаковой чётности, и этот пример однозначно восстанавливается: $8 \cdot 8 = 64$. Тогда во втором примере правая часть заканчивается на 6, и он тоже восстанавливается однозначно: $4 \cdot 4 = 16$. Следовательно, цифра «слона» — это 6, цифра «мышки» — это 4, цифра «свинки» — это 8, цифра «панды» — это 1. ☐

Задача 4.6. Четвероклассник Вася каждый учебный день ходит в столовую и покупает либо 9 зефирок, либо 2 пирожка с мясом, либо 4 зефирки и 1 пирожок с мясом. Иногда Вася настолько занят общением с одноклассниками, что вообще ничего не покупает. За 15 учебных дней Вася купил 30 зефирок и 9 пирожков с мясом. Сколько из них было дней, когда он не покупал ничего?

Ответ: 7.

Решение. Переберём все варианты, сколько раз Вася мог покупать 9 зефирок — ясно, что это не могло происходить более трёх раз.

Предположим, Вася ни разу не покупал 9 зефирок. Тогда 30 зефирок он покупал пачками по 4 штуки в некоторые дни, но 30 не делится на 4. Противоречие.

Предположим, Вася ровно один раз покупал 9 зефирок. Тогда остальные $30 - 9 = 21$ зефирку он покупал пачками по 4 штуки в некоторые дни, но 21 не делится на 4. Противоречие.

Предположим, Вася ровно два раза покупал 9 зефирок. Тогда остальные $30 - 9 \cdot 2 = 12$ зефирок он покупал пачками по 4 штуки в некоторые дни. Значит, было ровно 3 дня, когда Вася покупал 4 зефирки и 1 пирожок с мясом. Поскольку остальные $9 - 3 = 6$ пирожков с мясом он покупал пачками по 2 штуки, то такое происходило ровно три раза. Тогда дней, когда Вася не покупал ничего, было ровно $15 - 2 - 3 - 3 = 7$.

Предположим, Вася ровно три раза покупал 9 зефирок. Тогда остальные $30 - 9 \cdot 3 = 3$ зефирки он покупал пачками по 4 штуки в некоторые дни, но 3 не делится на 4. Противоречие. ☐

Задача 4.7. На фестиваль тёзок приехали 45 Александров, 122 Бориса, 27 Василиев и несколько Геннадиев. В начале фестиваля все они встали в ряд так, что никакие два человека с одинаковыми именами не стояли рядом. Какое наименьшее число Геннадиев могло приехать на фестиваль?

Ответ: 49.

Решение. Поскольку всего Борисов 122, и между любыми двумя из них стоит хотя бы по одному не Борису (Александру/Василию/Геннадию), то не Борисов хотя бы 121. Поскольку есть всего 45 Александров и 27 Василиев, то Геннадиев хотя бы $121 - 45 - 27 = 49$.

Заметим также, что на фестивале могло быть ровно 49 Геннадиев. Пусть в шеренге стояли 122 Бориса. Затем 121 промежуток между ними начали заполнять остальные люди: в первые 45 промежутков встало по Александру, в следующие 27 — по Василию, в следующие 49 — по Геннадию. Легко понять, что все условия задачи выполняются. □

Задача 4.8. У купца есть 6 мешков, которые весят 13, 15, 16, 17, 21 и 24 кг. Один мешок заполнен репой, а каждый из оставшихся — либо луком, либо морковью. Купец знает, что суммарный вес моркови в два раза больше суммарного веса лука. В каком мешке может находиться репа? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 13 или 16.

Решение. Лук суммарно весит целое число килограмм, а морковь — вдвое больше. Значит, суммарно лук и морковь весят целое число килограмм, делящееся на 3, а находятся они во всех мешках, кроме какого-то одного. Общий вес всех мешков составляет $13+15+16+17+21+24=106$ кг, тогда общий вес лука и моркови равен одному из следующих чисел:

- $106-13=93$ кг;
- $106-15=91$ кг;
- $106-16=90$ кг;
- $106-17=89$ кг;
- $106-21=85$ кг;
- $106-24=82$ кг.

Нам подходят только 93 и 90.

Репа могла находиться в мешке весом 13 кг, если лук находился в мешках весом 15 и 16 кг, а морковь — в мешках весом 17, 21 и 24 кг. Действительно, $17+21+24=62=2\cdot(15+16)$.

Репа также могла находиться и в мешке весом 16 кг, если лук находился в мешках весом 13 и 17 кг, а морковь — в мешках весом 15, 21 и 24 кг. Действительно, $15+21+24=60=2\cdot(13+17)$. □

5 класс

Задача 5.1. Даша называет натуральное число *особенным*, если для его записи используются четыре различные цифры. Например, число 3429 — особенное, а число 3430 — не особенное.

Чему равно наименьшее особенное число, большее 3429?

Ответ: 3450.

Решение. Заметим, что все числа вида 343⋆ и 344⋆ не являются особенными. А следующее за ними число 3450 — особенное. □

Задача 5.2. Вначале сказочный остров был разделён на три графства: в первом графстве жили только эльфы, во втором — только гномы, в третьем — только кентавры.

- В течение первого года каждое графство, где жили не эльфы, было разделено на три графства.
- В течение второго года каждое графство, где жили не гномы, было разделено на четыре графства.
- В течение третьего года каждое графство, где жили не кентавры, было разделено на шесть графств.

Сколько графств было на сказочном острове после всех этих событий?

Ответ: 54.

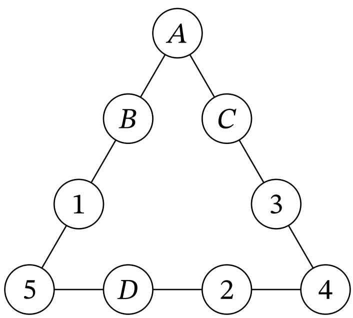
Решение. Изначально было по 1 графству каждого вида.

После первого года стало 1 графство эльфов, 3 графства гномов, 3 графства кентавров.

После второго года стало 4 графства эльфов, 3 графства гномов, 12 графств кентавров.

После третьего года стало 24 графства эльфов, 18 графств гномов, 12 графств кентавров. Суммарно $24 + 18 + 12 = 54$ графств. □

Задача 5.3. В пяти из девяти кружков на картинке записаны числа $1, 2, 3, 4, 5$. Замените цифрами $6, 7, 8, 9$ оставшиеся кружки A, B, C, D так, чтобы суммы четырёх чисел вдоль каждой из трёх сторон треугольника были одинаковыми.



Постройте соответствие.

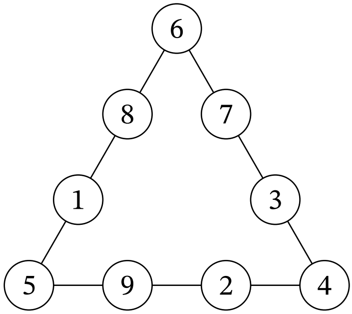
- В кружке A
- В кружке B
- В кружке C
- В кружке D

- стоит число 6.
- стоит число 7.
- стоит число 8.
- стоит число 9.

Ответ: $A = 6$, $B = 8$, $C = 7$, $D = 9$.

Решение. Из условия следует, что $A + C + 3 + 4 = 5 + D + 2 + 4$, откуда $D + 4 = A + C$. Заметим, что $13 \geqslant D+4 = A+C \geqslant 6+7$. Значит, такое возможно только лишь когда $D = 9$, а A и C — это 6 и 7 в некотором порядке. Отсюда следует, что $B = 8$.

Сумма чисел вдоль каждой из сторон равна $5+9+3+4 = 20$. Поскольку $5+1+8+A = 20$, то $A = 6$. Поскольку $6 + C + 3 + 4 = 20$, то $C = 7$.



□

Задача 5.4. Крош, Бараш, Нюша и Ёжик построили на одной улице четыре дома: мармеладный, шоколадный, карамельный и пряничный.

- Мармеладный домик не стоит с краю.
- Бараш и Ёжик — не соседи.
- Соседний слева домик от домика Бараша — карамельный.
- Шоколадный дом расположен левее мармеладного и карамельного.
- Соседи Кроша — Ёжик и Нюша.

Кто в каком доме живёт?

Постройте соответствие.

- В мармеладном доме живёт
- В шоколадном доме живёт
- В карамельном доме живёт
- В пряничном доме живёт

- Крош.
- Бараш.
- Нюша.
- Ёжик.

Ответ: Крош живёт в мармеладном домике, Бараш — в пряничном, Нюша — в карамельном, Ёжик — в шоколадном.

Решение. Обозначим через К,Б,Н,Ё домики Кроша, Бараша, Нюши, Ёжика соответственно.

По условию соседи Кроша — Ёжик и Нюша. Предположим, их домики располагаются на улице слева направо так: Н,К,Ё. Поскольку Бараш и Ёжик — не соседи, то Б находится левее Н. Но левее Б должен быть карамельный домик, а он самый левый из всех, противоречие.

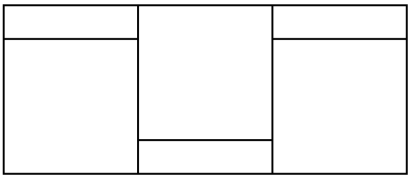
Следовательно, домики Кроши, Ёжика и Нюши располагаются на улице слева направо так: Ё,К,Н. Поскольку Бараш и Ёжик — не соседи, то Б находится правее Н, и порядок домиков слева направо такой: Ё,К,Н,Б. Значит, Нюша живёт в карамельном домке. Поскольку мармеладный домик не с краю, то в нём живёт Крош. Поскольку шоколадный левее мармеладного, то в нём живёт Ёжик. А в оставшемся пряничном домике живёт Бараш.

шоколадный	маремаладный	карамельный	пряничный
Ёжик	Кроша	Нюша	Бараш

□

Задача 5.5. Большой прямоугольник состоит из трёх одинаковых квадратов и трёх одинаковых маленьких прямоугольников. Периметр квадрата равен 24, а периметр маленького прямоугольника равен 16. Чему равен периметр большого прямоугольника?

Периметр фигуры — сумма длин всех её сторон.

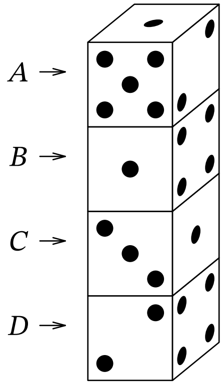


Ответ: 52.

Решение. У квадрата все стороны равны, и его периметр равен 24, поэтому каждая его сторона равна $24 : 4 = 6$. У прямоугольника периметр равен 16, и две его наибольшие стороны равны по 6, поэтому две наименьшие стороны равны по $(16 - 6 \cdot 2) : 2 = 2$. Тогда весь большой прямоугольник имеет размеры 8×18, и его периметр равен $2 \cdot (8 + 18) = 52$. □

Задача 5.6. Есть 4 абсолютно одинаковых кубика, у каждого из которых на одной грани отмечены 6 точек, на другой — 5, ..., на оставшейся — 1. Из этих кубиков склеили фигуру, изображённую на рисунке.

Сколько точек на четырёх левых гранях?



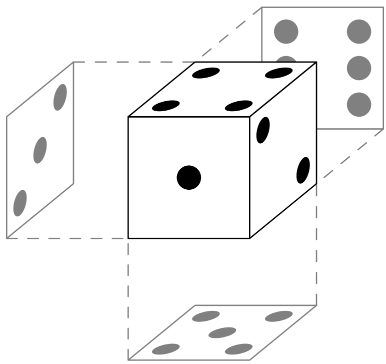
- Количество точек на грани A равно ...
- Количество точек на грани B равно ...
- Количество точек на грани C равно ...
- Количество точек на грани D равно ...

Ответ: На грани A находится 3 точки, на грани B — 5, на грани C — 6, на грани D — 5.

Решение. Рассмотрим расположение граней на одном кубике. Будем обозначать грани числами в соответствии с количеством точек на них.

Из картинки ясно, что грань 1 граничит с гранями 2, 3, 4 и 5. Напротив неё, таким образом, находится грань 6.

Грань 2 граничит с 4 и 5 (а также с 1). Значит, соседи грани 1 расположены вокруг неё в порядке 2, 5, 3, 4, то есть грани 4 и 5 противоположны. Оставшиеся две грани, 2 и 3, также противоположны.



Теперь нетрудно понять, что на грани A находится 3 точки, на грани B — 5, на грани C — 6, на грани D — 5. □

Задача 5.7. В волшебном магазине за 20 серебряных монет можно купить мантию-невидимку и получить 4 золотых монеты сдачи. За 15 серебряных монет можно купить мантию-невидимку и получить 1 золотую монету сдачи. Сколько серебряных монет получится в качестве сдачи, если купить мантию-невидимку за 14 золотых монет?

Ответ: 10.

Решение. В первом случае, по сравнению со вторым, заплатив 5 лишних серебряных монет, можно получить лишние 3 золотые монеты сдачи. Следовательно, 5 серебряных монет равноценны 3 золотым.

Во втором случае, заплатив 15 серебряных монет (что равноценно $3 \cdot 3 = 9$ золотым), можно получить мантию и 1 золотую монету сдачи. Следовательно, мантия стоит 8 золотых монет.

В третьем случае, заплатив 14 золотых монет за мантию стоимостью 8 монет, получится 6 золотых монет сдачи, что равноценно $5 \cdot 2 = 10$ серебряным монетам. □

Задача 5.8. Каждый из 33 богатырей либо всегда лжёт, либо всегда говорит правду. Известно, что у каждого богатыря есть ровно одно любимое оружие: меч, копьё, топор или лук.

Однажды Дядька Черномор задал каждому богатырю четыре вопроса:

- Твоё любимое оружие меч?
- Твоё любимое оружие копьё?
- Твоё любимое оружие топор?
- Твоё любимое оружие лук?

На первый вопрос утвердительно ответили 13 богатырей, на второй вопрос — 15 богатырей, на третий — 20 богатырей, на четвёртый — 27 богатырей.

Сколько всего богатырей всегда говорят правду?

Ответ: 12.

Решение. Заметим, что каждый из правдоговорящих богатырей отвечает утвердительно только на один вопрос, а каждый из лгущих богатырей — ровно на три вопроса. Пусть правдоговорящих богатырей было x, а лгущих — $(33 - x)$. Тогда всего утвердительных ответов было $13 + 15 + 20 + 27 = x + 3 \cdot (33 - x)$, откуда получаем $75 = 99 - 2x$ и $x = 12$.

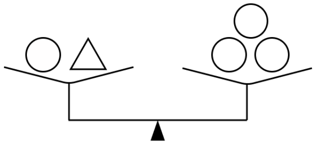
Заметим также, что правдоговорящих богатырей может быть ровно 12. Пусть 8 лгущих богатырей больше всего любят меч, ещё 6 лгущих богатырей — копьё, ещё 1 лгущий богатырь — топор, ещё 6 лгущих богатырей — лук, ещё 12 правдивых богатырей — лук. Несложно убедиться, что все условия задачи в этом случае выполняются. □

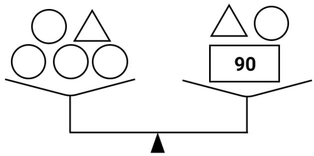
6 класс

Задача 6.1. В набор входят 8 гирь: 5 одинаковых круглых, 2 одинаковые треугольные и одна прямоугольная гиря весом 90 грамм.

Известно, что 1 круглая и 1 треугольная гиря уравновешивают 3 круглые гири. Кроме этого, 4 круглые гири и 1 треугольная уравновешивают 1 треугольную, 1 круглую и 1 прямоугольную гирю.

Сколько весит треугольная гиря?





Ответ: 60.

Решение. Из первого взвешивания следует, что 1 треугольная гиря уравновешивает 2 круглые гири.

Из второго взвешивания следует, что 3 круглые гири уравновешивают 1 прямоугольную гирю, которая весит 90 грамм. Следовательно, круглая гиря весит $90 : 3 = 30$ грамм, а треугольная — $30 \cdot 2 = 60$ грамм. □

Задача 6.2. У ювелира есть шесть шкатулок: в двух лежат алмазы, в двух — изумруды, в двух — рубины. На каждой шкатулке написано, сколько драгоценных камней в ней лежит.

Известно, что общее количество рубинов на 15 больше общего количества алмазов. Сколько суммарно изумрудов лежит в шкатулках?

Ответ: 12.

Решение. Всего рубинов не больше $13+8=21$, а алмазов не меньше $2+4=6$, при этом по условию их количества различаются на 15. Такое возможно, только если рубины лежат в шкатулках с 13 и 8 камнями, а алмазы — в шкатулках с 2 и 4 камнями. Тогда изумруды лежат в двух оставшихся шкатулках, и их всего $5+7=12$. □

Задача 6.3. В новом учебнике по математике всего 91 задача. Юра начал их решать по утрам, начиная с 6 сентября.

Каждым утром, начиная с 7 сентября, он решает на одну задачу меньше, чем предыдущим утром (пока задачи не закончатся).

Вечером 8 сентября Юра понял, что в учебнике осталось решить ещё 46 задач. Какого сентября он дорешает учебник?

Ответ: 12.

Решение. За первые 3 дня Юра решил $91-46=45$ задач. Пусть 7 сентября он решил z задач, тогда 6 сентября он решил $(z+1)$ задач, а 8 сентября он решил $(z-1)$ задач. Получаем, что $45=(z+1)+z+(z-1)=3z$, откуда $z=15$.

Поскольку $91=16+15+14+13+12+11+10$, Юра будет решать задачи ровно 7 дней, с 6 по 12 сентября. □

Задача 6.4. Найдите любое решение ребуса

$$\begin{array}{r} \mathrm{A\,B\,A} \\ +\,\mathrm{A\,B\,C} \\ \mathrm{A\,C\,C} \\ \hline 1\,4\,1\,6 \end{array}$$

где A, B, C — три различные ненулевые цифры.

Введите значения цифр A, B, C.

Вместо буквы A должна стоять цифра:

Вместо буквы B должна стоять цифра:

Вместо буквы C должна стоять цифра:

Ответ: $A = 4, B = 7, C = 6$.

Решение. Предположим, $A \leqslant 3$. Тогда $1416 = \overline{ABA} + \overline{ABC} + \overline{ACC} < 400 + 400 + 400 = 1200$ — противоречие.

Предположим, $A \geqslant 5$. Тогда $1416 = \overline{ABA} + \overline{ABC} + \overline{ACC} \geqslant 500 + 500 + 500 = 1500$ — противоречие.

Следовательно, $A = 4$. Рассмотрев разряд единиц, получаем $A+2C = 4+2C$ заканчивается на 6, что возможно лишь при $C = 1$ или $C = 6$.

Если $C = 1$, то $1416 = \overline{ABA} + \overline{ABC} + \overline{ACC} \leqslant 494 + 491 + 411 = 1396$ — противоречие.

Следовательно, $C = 6$. Тогда

$$1416 = \overline{4B4} + \overline{4B6} + 466 = (404 + \overline{B0}) + (406 + \overline{B0}) + 466 = 1276 + 2 \cdot \overline{B0},$$

откуда получаем $B = 7$. □

Задача 6.5. Маша сказала Саше, что задумала два различных натуральных числа, больших 11. Потом она сообщила Саше их сумму.

- Саша, подумав, сказал: «Я не знаю задуманные числа».
- На что Маша ответила: «Как минимум одно из них — чётное».
- Тогда Саша сказал: «Теперь я точно знаю задуманные числа!»

Какие числа задумала Маша? Введите ответы в любом порядке.

Ответ: 12 и 16.

Решение. Сумма двух задуманных различных натуральных чисел, больших 11, является натуральным числом, не меньшим $12 + 13 = 25$.

Предположим, Маша сказала Саше, что сумма чисел равна 25. Тогда он бы сразу понял, что это числа 12 и 13. Противоречие.

Предположим, Маша сказала Саше, что сумма чисел равна 26. Тогда он бы сразу понял, что это числа 12 и 14 (два одинаковых числа 13 быть не могло). Противоречие.

Предположим, Маша сказала Саше, что сумма чисел равна 27. Узнав про чётность одного из чисел, Саша бы наверняка так и не понял задуманные числа: то ли это были 12 и 15, то ли 13 и 14. Противоречие.

Предположим, Маша сказала Саше, что сумма чисел равна 28. Тогда он бы понял, что это могли быть либо 12 и 16, либо 13 и 15 (два одинаковых числа 14 быть не могло). Узнав про чётность одного из чисел, Саша бы точно понял, что это числа 12 и 16.

Предположим, Маша сказала Саше, что сумма чисел равна $S \geqslant 29$. Узнав про чётность одного из чисел, Саша бы наверняка так и не понял задуманные числа. Действительно, как минимум две пары подходят под все вышеописанные условия: 12 и $S-12$ (причём $S-12>12$), а также 14 и $S-14$ (причём $S-14>14$). Противоречие. □

Задача 6.6. Ксюша бегает в два раза быстрее, чем ходит пешком (обе скорости постоянные).

Во вторник, выйдя из дома в школу, она сначала шла, а потом, когда поняла, что опаздывает, побежала. При этом расстояние, которое Ксюша прошла, было вдвое больше расстояния, которое она пробежала. В итоге от дома до школы она добралась ровно за 30 минут.

В среду Ксюша вышла из дома ещё позже, поэтому бежать пришлось вдвое большее расстояние, чем идти пешком. За сколько минут она добралась от дома до школы в среду?

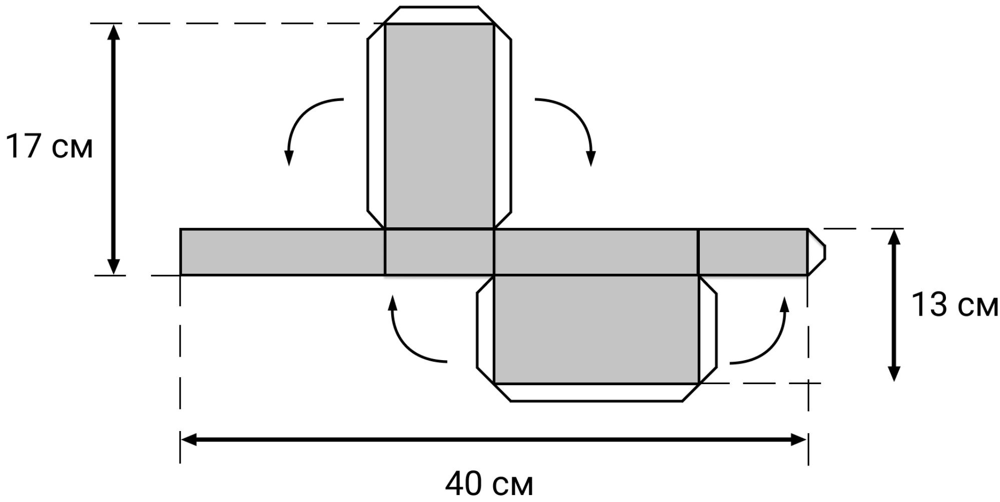
Ответ: 24.

Решение. Пусть расстояние от дома до школы равно $3S$, скорость ходьбы Ксюши равна v, а скорость бега — $2v$ (расстояние измеряем в метрах, а скорость — в метрах в минуту). Тогда во вторник Ксюша прошла расстояние $2S$ и пробежала расстояние S. А в среду наоборот, она прошла расстояние S и пробежала расстояние $2S$.

По условию $30 = \frac{2S}{v} + \frac{S}{2v} = \frac{4S}{2v} + \frac{S}{2v} = \frac{5S}{2v}$, откуда получаем $\frac{S}{v} = 30 \cdot \frac{2}{5} = 12$.

Тогда в среду Ксюша добралась до школы за $\frac{2S}{2v} + \frac{S}{v} = \frac{S}{v} + \frac{S}{v} = 12 + 12 = 24$ минуты. □

Задача 6.7. В журнале «Юный конструктор» есть чертёж для сбора небольшой коробки, изображённый на рисунке. Верхний прямоугольник — крышка коробки, нижний — дно коробки, остальные четыре прямоугольника — боковые стенки.



Вычислите в сантиметрах длину, ширину и высоту коробки, которую удастся склеить, если соблюсти размеры, указанные на чертеже. Введите ответы в любом порядке.

Ответ: Размеры коробки — $5 \times 8 \times 12$.

Решение. Пусть a — наименьший из всех трёх размеров коробки, b — второй по величине, c — наибольший (все размеры измеряем в сантиметрах). Из условия следует, что $a+c=17$, $a+b=13$, $c+b+c+b=40$ (последнее условие означает, что $b+c=20$). Сумма всех трёх размеров равна

$$a+b+c=\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{2}=\frac{13+20+17}{2}=25.$$

Тогда $a=(a+b+c)-(b+c)=25-20=5$, $b=(a+b+c)-(a+c)=25-17=8$, $c=(a+b+c)-(a+b)=25-13=12$. Значит, коробка имеет размеры $5 \times 8 \times 12$. □

Задача 6.8. В стране Драконии живут красные, зелёные и синие драконы. У каждого дракона три головы, каждая из которых всегда говорит только правду или всегда лжёт. При этом у каждого дракона хотя бы одна голова говорит правду. Однажды за круглый стол сели 530 драконов, и каждый из них сказал:

- 1-я голова: «Слева от меня зелёный дракон».
- 2-я голова: «Справа от меня синий дракон».
- 3-я голова: «Рядом со мной нет красного дракона».

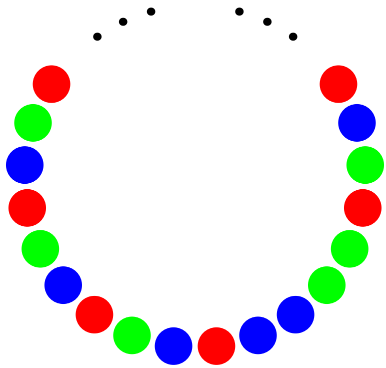
Какое наибольшее количество красных драконов могло быть за столом?

Ответ: 176.

Решение. Рассмотрим произвольного красного дракона. У дракона справа от него хотя бы одна голова должна сказать правду. Заметим, что 1-я и 3-я головы не могут говорить правду (ведь слева находится красный дракон), поэтому правду говорит 2-я голова, и справа от этого дракона обязательно синий дракон. Теперь рассмотрим дракона слева от выбранного красного. Аналогичными рассуждениями понимаем, что у него правду может сказать только 1-я голова, и слева от этого дракона обязательно зелёный.

Из предыдущих рассуждений получаем, что для любого красного дракона через один справа от него обязательно находится синий дракон, а через один слева — зелёный. Для каждого красного дракона объединим этих трёх драконов в одну группу. Заметим, что любой дракон входит максимум в одну такую группу. Тогда получаем, что таких групп не больше $530/3 < 177$, т.е. не больше 176. Следовательно, и красных драконов не больше 176.

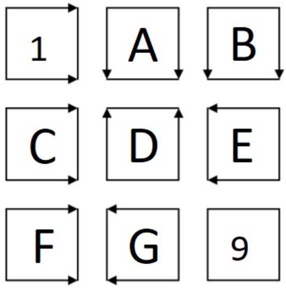
Теперь приведём пример. Рассадим 176 красных драконов по кругу, и в 175 промежутков между ними поставим зелёного и синего дракона: ...КЗСК..., а в один промежуток поставим двух синих и двух зелёных драконов: ...КССЗЗК.... Несложно проверить, что все условия выполняются: у каждого дракона минимум одна голова скажет правду, а всего драконов ровно 530.



□

7 класс

Задача 7.1. На картинке нарисованы девять квадратиков, на восьми из них нарисованы стрелки. Числа 1 и 9 в них уже расставлены. Замените буквы в оставшихся квадратиках на числа от 2 до 8 так, чтобы стрелки квадратика с числом 1 указывали в направлении квадратика с числом 2 (число 2 может быть в квадратике A или B), стрелки квадратика с числом 2 указывали в направлении квадратика с числом 3 и т. д., стрелки квадратика с числом 8 указывали в направлении квадратика с числом 9).



Постройте соответствие.

- В квадрате A
- В квадрате B
- В квадрате C
- В квадрате D
- В квадрате E
- В квадрате F
- В квадрате G

- стоит число 2.
- стоит число 3.
- стоит число 4.
- стоит число 5.
- стоит число 6.
- стоит число 7.
- стоит число 8.

Ответ: В квадрате A стоит число 6, в B – 2, в C – 4, в D – 5, в E – 3, в F – 8, в G – 7.

Решение. Упорядочим все квадратики по возрастанию чисел в них. В этой «возрастающей цепочке» содержатся все девять квадратиков.

Заметим, что в этой цепочке непосредственно перед C может быть только E (на C ничего не указывает, кроме стрелок E). Аналогично, непосредственно перед E может быть только B (не C, потому что C находится после E). Непосредственно перед B может быть только 1. Следовательно, в квадратиках B, E, C стоят числа $2, 3, 4$ соответственно. Тогда 5 стоит точно в D, 6 стоит точно в A, 7 стоит точно в G, 8 стоит точно в F. □

Задача 7.2. Петя купил себе в магазине шорты для футбола.

- Если бы он купил шорты с футболкой, стоимость покупки была бы вдвое больше.
- Если бы он купил шорты с бутсами, стоимость покупки была бы впятеро больше.
- Если бы он купил шорты с щитками, стоимость покупки была бы втрое больше.

Во сколько раз больше была бы стоимость покупки, если бы Петя купил шорты, футболку, бутсы и щитки?

Ответ: 8.

Решение. Пусть шорты стоили x. Поскольку шорты с футболкой стоят $2x$, то футболка стоит тоже x. Поскольку шорты с бутсами стоят $5x$, то бутсы стоят $4x$. Поскольку шорты с щитками стоят $3x$, то щитки стоят $2x$. Тогда если бы Петя купил шорты, футболку, бутсы и щитки, то его покупка составила бы $x + x + 4x + 2x = 8x$, что в 8 раз больше, чем x. □

Задача 7.3. Лёша собирал друзей поиграть в прятки. Он опросил Андрея, Борю, Васю, Гену и Дениса и узнал следующее.

- Если Андрей пойдёт играть в прятки, то Боря тоже пойдёт, а Вася — нет.
- Если Боря пойдёт играть в прятки, то Гена или Денис тоже пойдёт.
- Если Вася не пойдёт играть в прятки, то Боря и Денис тоже не пойдут.
- Если Андрей не пойдёт играть в прятки, то Боря пойдёт играть, а Гена не пойдёт.

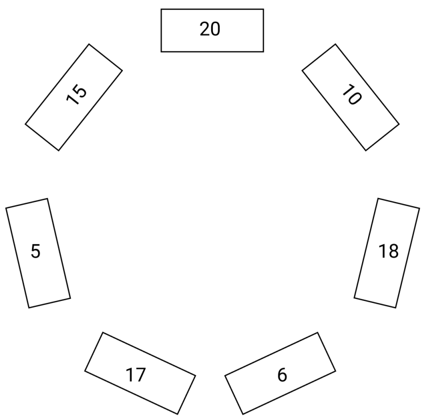
В итоге Лёша с кем-то из друзей сыграл в прятки. С кем именно? (Все ребята придерживались своих мнений.)

Ответ: С Борей, Васей и Денисом.

Решение. Вне зависимости от того, пойдёт ли Андрей играть в прятки, Боря пойдёт точно. Тогда и Вася пойдёт играть в прятки (если бы Вася не пошёл, то не пошёл бы и Боря). Тогда Андрей не пойдёт играть в прятки (если бы Андрей пошёл, то не пошёл бы Вася). Тогда Гена точно не пойдёт. Поскольку Боря пойдёт, пойдёт также Гена или Денис. Поскольку Гена не пойдёт, то пойдёт Денис. Итак, в прятки с Лёшей сыграли только Боря, Вася и Денис. □

Задача 7.4. По кругу стоят семь шкатулок, в каждой из них лежит несколько монет. На рисунке изображено, сколько монет в какой шкатулке лежит.

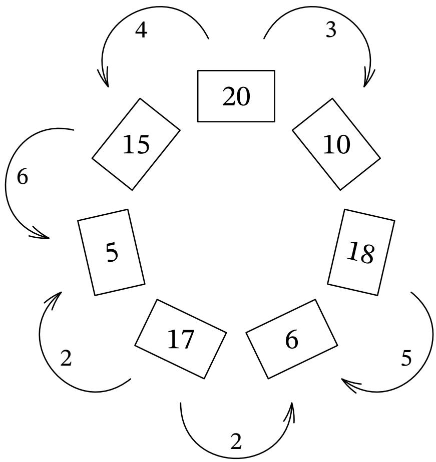
За один ход разрешается переложить одну монету в соседнюю шкатулку. Какое минимальное количество ходов потребуется, чтобы уравнять количество монет во всех шкатулках?



Ответ: 22.

Решение. Заметим, что всего монет суммарно 91, поэтому после всех ходов в каждой шкатулке должно получиться ровно по 13 монет. Из шкатулки с 20 монетами нужно переложить хотя бы 7 монет. Теперь рассмотрим шкатулки, соседние со шкатулкой с 20 монетами. Изначально в них суммарно 25 монет, и ещё хотя бы 7 монет в них перейдёт из шкатулки с 20 монетами. В итоге в этих двух шкатулках должно получиться суммарно 26 монет, поэтому хотя бы $25 + 7 - 26 = 6$ монет нужно будет из этих шкатулок переложить. Осталось рассмотреть шкатулки с 17 и 18 монетами, из них нужно переложить хотя бы 4 и 5 монет соответственно. Итого ходов должно быть хотя бы $7 + 6 + 4 + 5 = 22$.

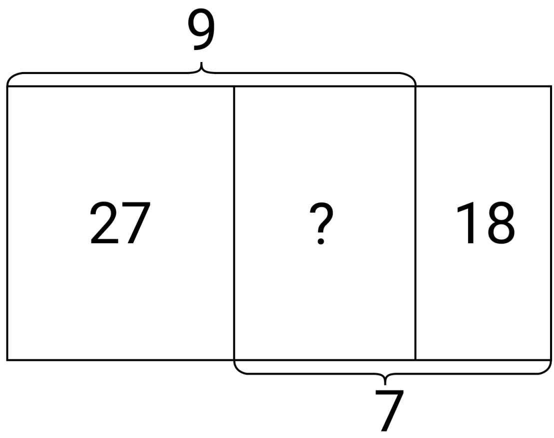
Приведём пример, как уравнять все шкатулки ровно за 22 хода. Из шкатулки с 20 монетами перекладываем 3 монеты в шкатулку с 10 (там становится 13), а также 4 монеты в шкатулку с 15 (там становится 19). Из шкатулки, где стало 19 монет, перекладываем 6 монет в шкатулку с 5 монетами (там становится 11). Из шкатулки с 17 монетами перекладываем 2 монеты в шкатулку с 11, а также 2 монеты в шкатулку с 6 (там становится 8). Осталось переложить 5 монет из шкатулки с 18 монетами в шкатулку с 8 монетами. Итого во всех шкатулках стало ровно по 13 монет. Несложно убедиться в том, что было сделано ровно 22 хода.



□

Задача 7.5. Прямоугольную полоску длины 16 разрезали на две полоски длин 9 и 7. Эти две полоски положили на стол так, как показано на рисунке.

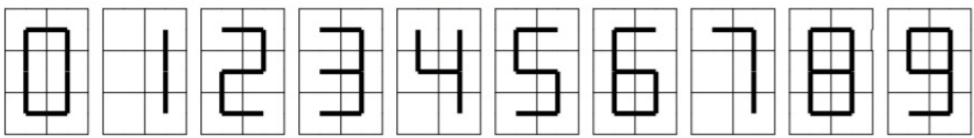
Известно, что площадь части стола, покрытой только левой полоской, равна 27, а площадь части стола, покрытой только правой полоской, равна 18. Найдите площадь части стола, покрытой обеими полосками.



Ответ: 13,5.

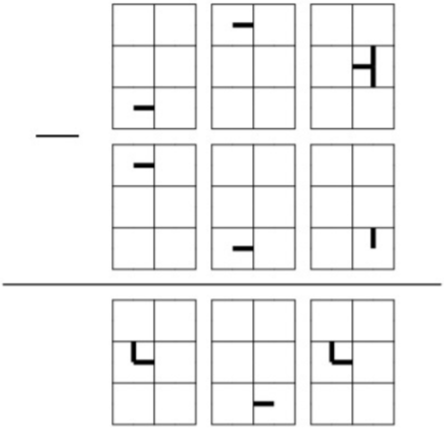
Решение. Поскольку у двух получившихся полосок ширина одинакова, их площади относятся как их длины, т.е. $9 : 7$. Обозначим через S площадь, покрытую обеими полосками. Тогда $\frac{27+S}{18+S} = \frac{9}{7}$, откуда получаем $7 \cdot (27+S) = 9 \cdot (18+S)$. Решая это линейное уравнение, получаем $S = 13,5$. □

Задача 7.6. На инженерном калькуляторе цифры отображаются так, как показано на рисунке ниже.



Дима на калькуляторе вычел из трёхзначного числа трёхзначное число и получил трёхзначное число. Но у калькулятора сломался экран, поэтому пример выглядел так, как показано на следующем рисунке. (В каждом прямоугольнике, состоящем из шести квадратиков, находится какая-то цифра. Среди этих шести квадратиков полностью исправно работает только один, на остальных пяти не отображается ничего.)

Чему в примере должны равняться уменьшаемое и вычитаемое, чтобы разность принимала наибольшее возможное значение? (Ответы можно вводить в любом порядке.)



Ответ: Уменьшаемое равно 923, вычитаемое равно 394.

Решение. Пусть $\overline{abc}$ — верхнее число, $\overline{def}$ — среднее число, $\overline{ghi}$ — нижнее число (разным буквам могут соответствовать одинаковые цифры). Последовательно сравнивая фрагменты цифр с полноценными изображениями, получаем варианты того, где какая цифра может быть. А именно, $a \in \{3,5,9\}$, $b \in \{2,3,7\}$, $c \in \{3,4,8,9\}$, $d \in \{2,3,7\}$, $e \in \{3,5,9\}$, $f \in \{1,4,7\}$, $g \in \{4,5,9\}$, $h \in \{2\}$, $i \in \{4,5,9\}$.

Заметим, что $\overline{ghi} = \overline{abc} - \overline{def} < 1000 - 100 = 900$, поэтому $g < 9$. Следовательно, $\overline{ghi} \leqslant 529$.

Предположим, что разность 529 возможна, т.е. $\overline{abc} - \overline{def} = 529$ или

$$\overline{abc} = \overline{def} + 529.$$

Поскольку $\overline{abc} = \overline{def} + 529 \geqslant 100 + 529 = 629$, то $a \geqslant 6$, т.е. $a = 9$. Если $d = 2$, то $900 \leqslant \overline{abc} = \overline{2ef} + 529 < 300 + 529 < 900$ — противоречие. Если $d = 7$, то $1000 > \overline{abc} = \overline{7ef} + 529 \geqslant 700 + 529 > 1000$ — противоречие. Значит, $d = 3$.

Рассмотрев разряд единиц, получаем, что сумма $f + 9$ оканчивается на цифру c. Если $f = 1$, то $c = 0$ — противоречие. Если $f = 7$, то $c = 6$ — противоречие. Остался только случай $f = 4$, тогда $c = 3$.

Если $e \leqslant 5$, то $900 \leqslant \overline{abc} = \overline{3e4} + 529 \leqslant 354 + 529 < 900$ — противоречие. Значит, $e > 5$, т.е. $e = 9$. Тогда $\overline{abc} = 394 + 529 = 923$, и $b = 2$.

Итак, наибольшая возможная разность достигается только в случае $923 - 394 = 529$. □

Задача 7.7. По кругу высажено 130 деревьев: берёзы и липы (оба вида присутствуют). На каждом дереве висит табличка с надписью: «Рядом растут два разных дерева». Известно, что среди всех деревьев неправда написана на всех липах и ровно на одной берёзе. Сколько могло быть высажено берёз? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 87.

Решение. Разобьём все деревья на чередующиеся группы подряд идущих берёз и подряд идущих лип (по условию есть группы обоих видов).

Предположим, существует группа из хотя бы 2 лип. Тогда на крайней из них была бы написана правда (ведь она находится между берёзой и липой) — противоречие. Значит, все группы лип состоят из 1 дерева. Тогда каждая липа находится между двумя берёзами, и на ней действительно написана неправда.

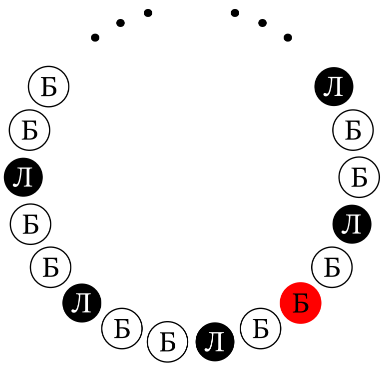
Рассмотрим теперь, какие могут быть по количеству группы берёз.

- Если в группе хотя бы 4 берёзы, то на всех некрайних (хотя бы на двух) написана неправда (ведь каждая из них находится между двумя берёзами) — противоречие, ведь таких берёз по условию всего одна.
- Если в группе 3 берёзы, то только на средней из них написана неправда.
- Если в группе 2 берёзы, то на каждой из них написана правда.
- Если в группе 1 берёза, то на ней написана неправда (ведь она находится между двумя липами).

Следовательно, существует несколько групп по 2 берёзы и ровно одна группа из 1 или 3 берёз.

Если есть группа из 1 берёзы, временно забудем её и одну соседнюю с ней липу. Тогда оставшиеся $130 - 2 = 128$ деревьев разобьются на блоки из 3 деревьев: двух берёз и одной липы. Но 128 не делится на 3 — противоречие.

Если же есть группа из 3 берёз, временно забудем одну из берёз этой группы. Тогда оставшиеся $130 - 1 = 129$ деревьев разобьются на блоки из 3 деревьев: двух берёз и одной липы. Таких блоков $\frac{129}{3} = 43$, а берёз в них суммарно $43 \cdot 2 = 86$. Вернув забытую берёзу, получаем, что всего берёз $86 + 1 = 87$.



□

Задача 7.8. У короля и королевы было три сына и несколько дочерей (хотя бы одна). 1-го сентября некоторого года король и королева заметили, что им обоим по 35 лет, более того, суммарный возраст их детей составляет тоже 35 лет. А 1-го сентября несколько лет спустя король и королева заметили, что их суммарный возраст равен суммарному возрасту всех их детей. (Новых детей за это время не появлялось; никто из членов семьи за это время не умер.)

Сколько детей у королевской четы, если известно, что их не больше 20? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 7 или 9.

Решение. Пусть у короля и королевы было $d \geqslant 1$ дочерей. Пусть также между двумя описанными моментами времени прошло n лет.

Изначально разность суммарного возраста родителей и суммарного возраста детей равнялась $35 + 35 - 35 = 35$ лет, а через n лет она стала равна 0. Поскольку каждый год эта разность уменьшалась на $(d + 3) - 2 = d + 1$ лет (ведь на 1 год становится старше каждый из $d + 3$ детей и каждый из 2 родителей), то

$$35 = n(d + 1).$$

Число 35 представимо в виде произведения двух натуральных чисел n и $d+1 \geqslant 2$, поэтому остаётся рассмотреть только три случая.

Пусть $n = 1$, $d + 1 = 35$. Тогда $d = 34$ — получаем противоречие с тем, что всего детей не больше 20.

Пусть $n = 7$, $d + 1 = 5$. Тогда $d = 4$, и всего детей было $4 + 3 = 7$. Такой случай возможен, например, если в семье в первый момент времени трём сыновьям было $2, 3, 4$ года, а четырём дочерям было $5, 6, 7, 8$ лет. Тогда суммарно детям было $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35$ лет — столько же, сколько королю и королеве. А через 7 лет им суммарно стало $9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 84 = 42 + 42$ — столько же, сколько суммарно королю и королеве.

Пусть $n = 5$, $d + 1 = 7$. Тогда $d = 6$, и всего детей было $6 + 3 = 9$. Такой случай возможен, например, если в семье в первый момент времени трём сыновьям было $1, 2, 4$ года, а шести дочерям было $1, 2, 4, 6, 7, 8$ лет. Тогда суммарно детям было $1 + 2 + 4 + 1 + 2 + 4 + 6 + 7 + 8 = 35$ лет — столько же, сколько королю и королеве. А через 5 лет им суммарно стало $6 + 7 + 9 + 6 + 7 + 9 + 11 + 12 + 13 = 80 = 40 + 40$ — столько же, сколько суммарно королю и королеве. □

8 класс

Задача 8.1. Перед пессимистом и оптимистом стоит по стакану (стаканы одинаковы). Каждому из них в стакан налили воды так, что стакан пессимиста оказался на 60% пуст, а стакан оптимиста, наоборот, на 60% полон. Оказалось, что воды в стакане пессимиста на 46 миллилитров меньше, чем в стакане оптимиста. Сколько миллилитров составляет объём стакана?

Ответ: 230.

Решение. Стакан пессимиста полон на 40%, а оптимиста — на 60%. У пессимиста, по сравнению с оптимистом, воды меньше на 20% всего объёма стакана, т. е. на $\frac{1}{5}$ всего объёма. Поскольку эта разность по условию составляет 46 миллилитров, весь объём стакана равен $46 \cdot 5 = 230$ миллилитров. □

Задача 8.2. На доске нарисованы 23 знака — несколько плюсов и несколько минусов. Если среди них выбрать 10 любых знаков, то среди них точно окажется хотя бы один плюс. Если же среди них выбрать 15 любых знаков, то среди них точно окажется хотя бы один минус. Сколько всего плюсов выписано?

Ответ: 14.

Решение. Поскольку среди любых 10 знаков есть плюс, то минусов на доске не больше 9 (иначе можно было бы выбрать 10 минусов).

Поскольку среди любых 15 знаков есть минус, то плюсов на доске не больше 14 (иначе можно было бы выбрать 15 плюсов).

Тогда всего знаков на доске не больше $9 + 14 = 23$. Поскольку их по условию ровно 23, получаем, что минусов на доске ровно 9, а плюсов — ровно 14. □

Задача 8.3. В роще живут 140 хамелеонов — синие и красные. Однажды несколько синих хамелеонов изменили свой окрас на красный. Тогда число синих хамелеонов уменьшилось в 5 раз, а число красных увеличилось в 3 раза. Сколько хамелеонов изменило свой окрас?

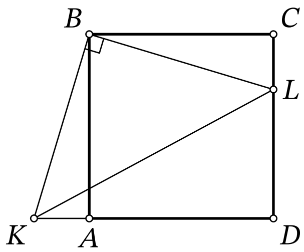
Ответ: 80.

Решение. Пусть синих хамелеонов стало x. Тогда изначально синих хамелеонов было $5x$. Соответственно, красных хамелеонов изначально было $140 - 5x$. Тогда красных хамелеонов стало $3 \cdot (140 - 5x)$. Поскольку общее количество хамелеонов сохранилось, получаем уравнение

$$x + 3 \cdot (140 - 5x) = 140.$$

Решая его, находим $x = 20$. Тогда цвет изменили $5x - x = 4x = 4 \cdot 20 = 80$ хамелеонов. □

Задача 8.4. Дан квадрат $ABCD$. Точка L на стороне CD и точка K на продолжении стороны DA за точку A таковы, что $\angle KBL = 90°$. Найдите длину отрезка LD, если $KD = 19$ и $CL = 6$.



Ответ: 7.

Решение. Поскольку $ABCD$ — квадрат, то $AB = BC = CD = AD$.

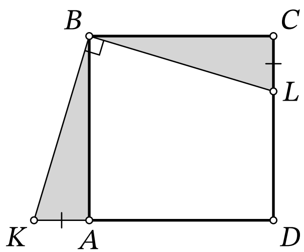


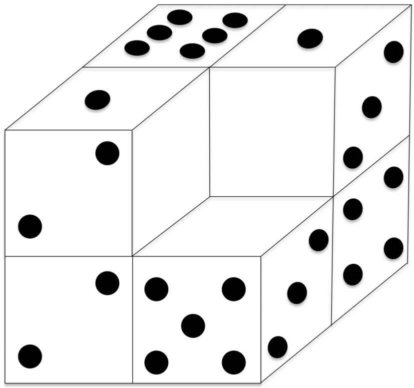
Рис. 1: к решению задачи 8.4

Заметим, что $\angle ABK = \angle CBL$, поскольку они оба дополняют $\angle ABL$ до 90°. Тогда прямоугольные треугольники ABK и CBL равны по острому углу и катету $AB = BC$ (рис. 1). Следовательно, $AK = CL = 6$. Тогда

$$LD = CD - CL = AD - CL = (KD - AK) - CL = KD - 2 \cdot CL = 19 - 2 \cdot 6 = 7. \qquad \square$$

Задача 8.5. Есть 7 абсолютно одинаковых кубиков, у каждого из которых на одной грани отмечена 1 точка, на другой — 2 точки, ..., на шестой — 6 точек. Причём на любых двух противоположных гранях суммарно отмечено 7 точек.

Из этих 7 кубиков сложили фигуру, изображённую на рисунке, так, что на каждой паре склеенных граней отмечено одинаковое количество точек. На всех гранях, кроме девяти, все точки стёрли, как показано на рисунке. Какое суммарное количество точек изначально было отмечено на поверхности фигуры?



Ответ: 75.

Решение. Есть 9 способов отрезать от нашей фигуры «кирпичик», состоящий из двух кубиков $1 \times 1 \times 1$. В каждом таком «кирпичике» есть две противоположные грани 1×1, расстояние между которыми равно 2. Поставим эти две грани в соответствие друг к другу.

Рассмотрим одну такую пару граней: на одной из них не стёрли точки, а на другой — стёрли. При этом, как нетрудно понять, первоначально на этих гранях было одинаковое количество точек.

Посчитаем суммарное количество точек, которое было на всех 9 парах граней первоначально. Получается

$$2 \cdot (1 + 1 + 6 + 2 + 2 + 5 + 3 + 3 + 4) = 54.$$

Осталось 6 граней 1×1, про которые нам до сих пор ничего неизвестно. Но можно заметить, что они разбиваются на пары по следующему принципу: в одной паре будут находится грани из одного кубика $1 \times 1 \times 1$. В каждой такой паре сумма чисел была равна 7. Тогда получаем, что количество точек на поверхности фигуры первоначально было равно

$$54 + 3 \cdot 7 = 75. \qquad \square$$

Задача 8.6. Вася задумал три натуральных числа с суммой 1003. Вычислив их произведение, Вася заметил, что оно заканчивается на N нулей. Какое наибольшее значение может принимать N?

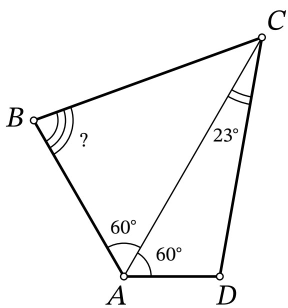
Ответ: 7.

Решение. Произведение трёх задуманных чисел могло заканчиваться на 7 нулей, например, если это были числа 625, 250, 128. Действительно, $625 + 250 + 128 = 1003$ и

$$625 \cdot 250 \cdot 128 = 5^4 \cdot (2 \cdot 5^3) \cdot 2^7 = 2^8 \cdot 5^7 = 2 \cdot 10^7 = 20000000.$$

Предположим, существуют три натуральных числа с суммой 1003, произведение которых заканчивается хотя бы на 8 нулей. Это означает, что оно делится на $10^8 = 2^8 \cdot 5^8$. Поскольку сумма всех трёх чисел не делится на 5, то какое-то из них не делится на 5. Тогда произведение двух других делится на 5^8. Тогда либо какое-то из них делится на 5^5 (что невозможно, ведь иначе общая сумма трёх чисел больше $5^5 = 3125 > 1003$), либо они оба делятся на 5^4 (что также невозможно, ведь иначе общая сумма трёх чисел больше $5^4 + 5^4 = 625 + 625 > 1003$). Противоречие. □

Задача 8.7. Про четырёхугольник $ABCD$ известно, что $\angle BAC = \angle CAD = 60°$, $AB + AD = AC$. Также известно, что $\angle ACD = 23°$. Сколько градусов составляет угол ABC?



Ответ: 83.

Решение. Отметим на луче AB такую точку K, что $AK = AC$. Тогда треугольник KAC равносторонний; в частности, $\angle AKC = 60°$ и $KC = AC$. При этом $BK = AK - AB = AC - AB = AD$. Это означает, что треугольники BKC и DAC равны по двум сторонам и углу $60°$ между ними (рис. 2).

Осталось заметить, что угол ABC — внешний для треугольника BKC — равен внешнему углу при вершине D треугольника DAC, который вычисляется как сумма двух внутренних: $60° + 23° = 83°$. □

Задача 8.8. В футбольном турнире участвовали команды A, B, C, D, E. Каждая команда сыграла с каждой ровно один раз. В каждой игре за победу давалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков.

Известно, что по окончании турнира

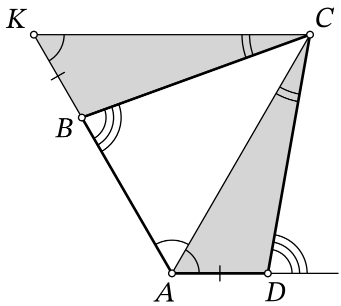


Рис. 2: к решению задачи 8.7

- все команды набрали разное количество очков;
- команда A набрала больше всех очков, хотя и проиграла команде B;
- команды B и C не проиграли ни одной игры;
- команда C набрала меньше очков, чем команда D.

Сколько очков набрала каждая из команд?

Команда A набрала:

Команда B набрала:

Команда C набрала:

Команда D набрала:

Команда E набрала:

Ответ: Команда A набрала 7 очков, B — 6, C — 4, D — 5, E — 2.

Решение. Будем обозначать количество очков команд A, B, C, D, E за a, b, c, d, e соответственно.

Всего было сыграно 10 матчей. За матч, в котором одна из команд победила, в общую сумму всех очков добавляется 3 очка, а за ничейную игру — 2 очка. Следовательно, общая сумма очков всех команд получится, если из 30 вычесть количество ничейных матчей.

Команда C не проиграла ни одного матча, поэтому набрала $c \geqslant 4$ очков. А команда B кроме того, что не проиграла ни одного матча, ещё и выиграла у команды A, поэтому набрала $b \geqslant 6$ очков.

Покажем, что команда C набрала ровно 4 очка. Предположим, что это не так, тогда она хотя бы один раз выиграла и набрала $c \geqslant 6$ очков. По условию команды A и D набрали больше очков, чем команда C, тогда $a > d > 6$. Четыре числа a, b, c, d различны и не меньше 6, следовательно, $a + b + c + d \geqslant 6 + 7 + 8 + 9 = 30$. Но все команды в сумме могут набрать максимум 30 очков, причём только в том случае, если ничьих не было. Получаем, что тогда команды набрали ровно $0, 6, 7, 8, 9$ очков, при этом ни разу не сыграв вничью. Получаем противоречие, ведь набрать 7 очков без ничьих невозможно.

Следовательно, команда C набрала ровно 4 очка, то есть все 4 игры сыграла вничью. Команда A проиграла команде B, а также сыграла вничью с командой C, поэтому она набрала не больше 7 очков. Поскольку $6 \leqslant b < a \leqslant 7$, то $b = 6$ и $a = 7$. Причём это возможно только в том случае, когда команда A выиграла у команд D и E, а команда B сыграла вничью со всеми, кроме A.

Осталось понять, что команда D должна была выиграть у команды E, чтобы набрать больше, чем C. Тогда команда D набрала 5 очков (выиграв у E и сыграв вничью с B и C), а команда E — 2 очка (сыграв вничью с B и C). $\square$

9 класс

Задача 9.1. Ваня бежит из дома в школу с постоянной скоростью. Если бы он изначально увеличил скорость на 2 м/с, то прибежал бы в школу в 2,5 раза быстрее. Во сколько раз быстрее он прибежал бы в школу, если бы изначально увеличил скорость на 4 м/с?

Ответ: 4.

Решение. Пусть изначальная скорость Васи равна v м/с. Если бы он бежал со скоростью $(v+2)$ м/с, то пробежал бы то же самое расстояние до школы в $2,5$ раза быстрее. Это означает, что $\frac{v+2}{v} = 2,5$, откуда находим $v = \frac{4}{3}$. Если бы он изначально бежал со скоростью $(v+4)$ м/с, то прибежал бы в школу в $\frac{v+4}{v}$ раза быстрее. Подставляя в это выражение $v = \frac{4}{3}$, получаем ответ 4. $\square$

Задача 9.2. В вершинах куба в некотором порядке написаны числа $1, 2, \ldots, 8$. Оказалось, что на трёх гранях куба выполняется следующее условие: одно из чисел в вершинах равно сумме трёх других.

Из вершины с числом 6 исходят три ребра. Какие три числа могут стоять на их концах? Ответы можно вводить в любом порядке. Достаточно привести один подходящий пример.

Ответ: Возможны три тройки: (2, 3, 5), (3, 5, 7), (2, 3, 7).

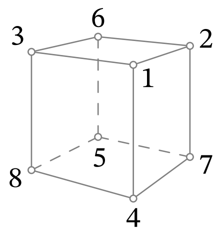
Решение. Назовём грань куба *красивой*, если на ней одно число равно сумме трёх других. Назовём число *большúм*, если на красивой грани оно равно сумме трёх других чисел. Ясно, что большими могут быть только числа $6, 7, 8$, причём

- в случае большого числа 6 с ним на одной грани находятся числа $1, 2, 3$;
- в случае большого числа 7 с ним на одной грани находятся числа $1, 2, 4$;
- в случае большого числа 8 с ним на одной грани находятся числа $1, 2, 5$ или $1, 3, 4$.

Ясно, что два больших числа не могут находиться одновременно на красивой грани. Также ясно, что для каждого большого числа с ним на одной грани находится число 1, следовательно, все три красивые грани имеют общую вершину, в которой стоит 1.

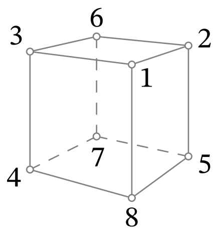
Две вершины назовём *смежными*, если их соединяет ребро куба. Рассмотрим два случая.

- Числа 1 и 8 находятся не в смежных вершинах. Ясно, что в смежных с 1 вершинах также не могут находиться числа 6 или 7 (иначе на некоторой красивой грани окажутся два больших числа). Значит, во всех трёх красивых гранях большие числа различны (т. е. это 6, 7, 8) и находятся напротив 1 (т. е. не смежны с вершиной 1). У красивых граней с числами 6 и 7 две общие вершины — это точно 1 и 2, тогда у красивых граней с числами 6 и 8 две общие вершины — это 1 и 3, а у красивых граней с числами 7 и 8 две общие вершины — это 1 и 4. Значит, в единственной вершине, не принадлежащей трём красивым граням, находится 5. Итак, в смежных с 6 вершинах находятся числа 2, 3, 5.

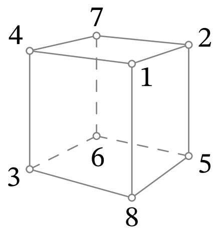


- Числа 1 и 8 находятся в смежных вершинах. Значит, число 8 является большим сразу в двух красивых гранях. Тогда с ребром, соединяющем 1 и 8, в одной из граней находятся числа 3 и 4, а в другой — 2 и 5. В оставшейся красивой грани большое число находится напротив 1, и им является либо 6, либо 7.

  – Если это 6, то в этой же грани находятся 2 и 3, а числа 4 и 5 лежат в противоположной грани куба, вместе с оставшимся числом 7. Итак, в смежных с 6 вершинах находятся числа 2, 3, 7.



  – Если это 7, то в этой же грани находятся 2 и 4, а числа 3 и 5 лежат в противоположной грани куба, вместе с оставшимся числом 6. Итак, в смежных с 6 вершинах находятся числа 3, 5, 7.



□

Задача 9.3. Учитель написал на доске арифметический пример: произведение двух смешанных дробей равно 43. Затем он заменил знаменатель первой дроби на X, а целую часть второй дроби — на Y. Получилось следующее выражение

$$5\frac{1}{X} \cdot Y\frac{1}{2} = 43.$$

Восстановите пример.

Ответ: $X = 17$, $Y = 8$.

Решение. Поскольку $5 < 5\frac{1}{X} \leqslant 5{,}5$, то

$$9 > \frac{43}{5} > Y\frac{1}{2} \geqslant \frac{43}{5{,}5} = \frac{86}{11} > 7{,}5.$$

Число Y — целое, поэтому $Y = 8$.

Тогда $5\frac{1}{X} = \frac{43}{8{,}5} = \frac{86}{17} = 5\frac{1}{17}$, поэтому $X = 17$. □

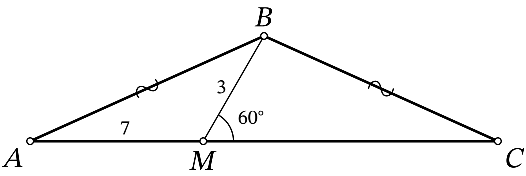
Задача 9.4. В городе N есть ровно три памятника. Однажды в этот город приехала группа из 42 туристов. Каждый из них сделал не более одной фотографии каждого из трёх памятников. Оказалось, что у любых двух туристов в совокупности есть фотографии всех трёх памятников. Какое наименьшее количество фотографий могли суммарно сделать все туристы?

Ответ: 123.

Решение. Пронумеруем три памятника. Заметим, что фото первого памятника отсутствует не более чем у одного туриста (иначе можно было бы выбрать двоих туристов, в совокупности у которых есть фото не более чем двух памятников), поэтому было сделано хотя бы $42 - 1 = 41$ фото первого памятника. Аналогично, было сделано хотя бы по 41 фото второго и третьего памятников. Тогда всего было сделано хотя бы $41 \cdot 3 = 123$ фото.

Ровно 123 фото могло быть, например, если 1 турист ничего не фотографировал, а остальные 41 — сфотографировали каждый памятник по одному разу. Ясно, что в этом случае все условия задачи выполняются. □

Задача 9.5. На основании AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечена точка M. Известно, что $AM = 7$, $MB = 3$, $\angle BMC = 60°$. Найдите длину отрезка AC.



Ответ: 17.

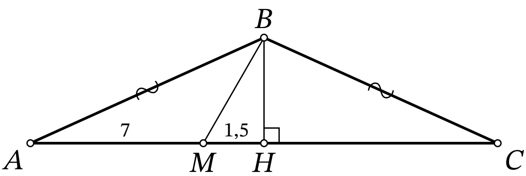


Рис. 3: к решению задачи 9.5

Решение. В равнобедренном треугольнике ABC проведём высоту и медиану BH (рис. 3). Заметим, что в прямоугольном треугольнике BHM угол при вершине B равен 30°, поэтому $HM = \frac{1}{2}BM = 1{,}5$. Тогда $AC = 2AH = 2(AM + MH) = 2 \cdot (7 + 1{,}5) = 17$. □

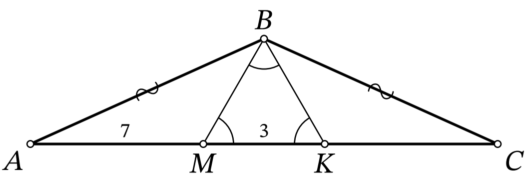


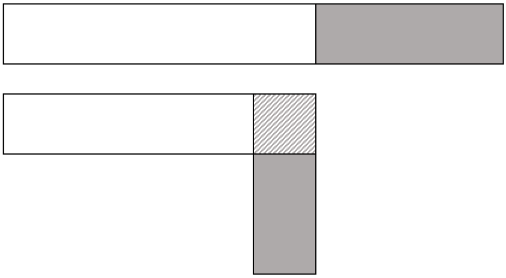
Рис. 4: к решению задачи 9.5

Другое решение. Отметим на MC точку K такую, что $\angle BKM = 60°$ (рис. 4; такая точка лежит именно на отрезке MC, поскольку $\angle BCM = \angle BAM = \angle BMC - \angle ABM < 60°$). Заметим, что в треугольнике BMK два угла равны 60°, поэтому он является равносторонним и $BK = MK = BM = 3$. Заметим также, что равны треугольники ABM и CBK, поскольку $BC = AB$, $\angle A = \angle C$, $\angle AMB = \angle CKB = 120°$ (следовательно, и $\angle ABM = \angle CBK$). Тогда $CK = AM = 7$ и $AC = AM + MK + KC = 7 + 3 + 7 = 17$. □

Задача 9.6. Даша разрезала прямоугольную полоску бумаги на два прямоугольника: белый и серый, каждый из которых имеет целые длины сторон. Она записала к себе в блокнот площади этих двух прямоугольников.

Затем она наложила прямоугольники друг на друга, как показано на рисунке. Получилось три новых прямоугольника, их площади Даша также записала к себе в блокнот.

Вычислите длину и ширину полоски, если сумма всех пяти чисел в блокноте Даши оказалась равна 43. Ответы можно вводить в любом порядке.



Ответ: 1 и 22.

Решение. Пусть короткая сторона полоски равна a, длинная сторона белой полоски равна b, длинная сторона серой полоски равна c. Сначала Даша записала два числа ab и ac. Затем она записала три числа $a(b-a)$, a^2, $a(c-a)$. Следовательно,

$$43 = ab + ac + a(b-a) + a^2 + a(c-a) = a(2b+2c-a).$$

Заметим также, что $a < b$, поэтому $a < b + (b-a) + 2c = 2b + 2c - a$. Получается, что простое число 43 представимо в виде произведения двух натуральных чисел, левое из которых меньше правого. Следовательно, $a = 1$ и $43 = 2b + 2c - a = 2b + 2c - 1$, откуда $b + c = 22$. Значит, исходная полоска имела размеры 1×22. □

Задача 9.7. На координатной плоскости отмечена точка A. На оси Ox отмечена точка B, на оси Oy — точка C.

Известно, что уравнения прямых AB, BC, AC в некотором порядке имеют вид $y = ax + 4$, $y = 2x + b$ и $y = \frac{a}{2}x + 8$ для некоторых действительных чисел a и b.

Найдите сумму координат точки A. Укажите все возможные значения.

Ответ: 13 или 20.

Решение. Обозначим график функции $y = ax + 4$ через l_1, функции $y = 2x + b$ — через l_2, функции $y = \frac{a}{2}x + 8$ — через l_3.

Из условия следует, что l_1, l_2, l_3 — это попарно пересекающиеся прямые (каждая из точек A, B, C принадлежит каким-то двум из них). Сразу заметим, что случай $a = 0$ невозможен, иначе прямые $y = ax + 4$ и $y = \frac{a}{2}x + 8$ были бы параллельны.

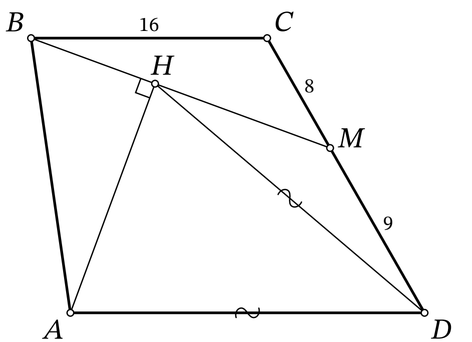
Точка C лежит на оси Oy, а также на двух из трёх данных прямых. Это означает, что их уравнения при подстановке $x = 0$ дают одинаковые значения (равные ординате точки C). Следовательно, C не может быть точкой пересечения прямых l_1 и l_3.

Легко видеть, что прямая l_1 пересекает ось Oy в точке $-\frac{4}{a}$, прямая l_2 — в точке $-\frac{b}{2}$, прямая l_3 — в точке $\frac{-16}{a}$. Среди этих трёх чисел есть два одинаковых (равных абсциссе точки B). Ясно, что $-\frac{4}{a} \neq \frac{-16}{a}$, поэтому возможны два случая.

- Пусть $-\frac{4}{a} = -\frac{b}{2}$, т.е. l_1 и l_2 пересекаются в точке B. Тогда C — точка пересечения прямых l_2 и l_3, т.е. их уравнения при $x = 0$ совпадают, и $b = 8$. Из равенства $-\frac{4}{a} = -\frac{b}{2}$ получаем, что $a = 1$. Тогда A — точка пересечения l_1 и l_3, являющихся графиками функций $y = x+4$ и $y = \frac{1}{2}x+8$. Несложно понять, что эти две прямые пересекаются в точке $(8; 12)$, поэтому ответом в этом случае является $8 + 12 = 20$.

- Пусть $-\frac{b}{2} = -\frac{16}{a}$, т.е. l_2 и l_3 пересекаются в точке B. Тогда C — точка пересечения прямых l_1 и l_2, т.е. их уравнения при $x = 0$ совпадают, и $b = 4$. Из равенства $-\frac{b}{2} = -\frac{16}{a}$ получаем, что $a = 8$. Тогда A — точка пересечения l_1 и l_3, являющихся графиками функций $y = 8x + 4$ и $y = 4x + 8$. Несложно понять, что эти две прямые пересекаются в точке $(1; 12)$, поэтому ответом в этом случае является $1+12 = 13$. □

Задача 9.8. На боковой стороне CD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) отмечена точка M. Из вершины A опущен перпендикуляр AH на отрезок BM. Оказалось, что $AD = HD$. Найдите длину отрезка AD, если известно, что $BC = 16$, $CM = 8$, $MD = 9$.



Ответ: 18.

Решение. Пусть прямые BM и AD пересекаются в точке K (рис. 5). Поскольку $BC \parallel AD$, треугольники BCM и KDM подобны по углам, откуда получаем $DK = BC \cdot \frac{DM}{CM} = 16 \cdot \frac{9}{8} = 18$.

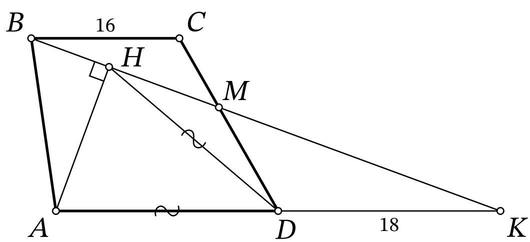


Рис. 5: к решению задачи 9.8

В равнобедренном треугольнике ADH проведём высоту и медиану DS. Тогда в треугольнике AHK отрезок DS проходит через середину стороны AH и параллелен HK. Следовательно, DS — средняя линия этого треугольника, и $AD = DK = 18$.

Замечание. Если в прямоугольном треугольнике точка на гипотенузе равноудалена от двух вершин этого треугольника, то она равноудалена от всех трёх его вершин. □

10 класс

Задача 10.1. Всю поверхность куба $13 \times 13 \times 13$ покрасили в красный цвет, а затем этот куб распилили на кубики $1 \times 1 \times 1$. Все грани кубиков $1 \times 1 \times 1$, не окрашенные в красный цвет, покрасили в синий цвет. Во сколько раз суммарная площадь синих граней больше суммарной площади красных граней?

Ответ: 12.

Решение. Каждая грань исходного куба состоит ровно из 13^2 квадратиков 1×1, поэтому всего в красный цвет оказались окрашены $6 \cdot 13^2$ квадратиков 1×1. Поскольку всего кубиков $1 \times 1 \times 1$ ровно 13^3, и у каждого из них 6 граней, то в синий цвет оказались окрашены $6 \cdot 13^3 - 6 \cdot 13^2$ квадратиков 1×1. Значит, ответом в задаче является число

$$\frac{6 \cdot 13^3 - 6 \cdot 13^2}{6 \cdot 13^2} = 13 - 1 = 12.$$

Замечание. Тот же ответ можно было получить и по-другому, поняв, что каждому красному квадратику 1×1 на поверхности исходного куба соответствует ровно 12 синих квадратиков 1×1 внутри этого куба. Эти 12 синих квадратиков получаются из красного последовательным применением параллельного переноса на вектор длины 1 «вглубь куба», перпендикулярный грани красного квадратика. □

Задача 10.2. Дано натуральное число n. Рома выписал на доску три числа n, $n + 1$, $n + 2$ друг за другом, без пробелов. У него получилась некоторая последовательность цифр, в которой есть подряд идущие цифры 6474. Найдите наименьшее возможное значение n.

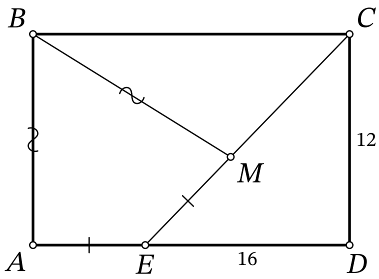
Ответ: 46.

Решение. Ясно, что для $n = 46$ условие выполняется.

Предположим, существует $n < 46$. В одном из трёх чисел Ромы должна быть цифра 6, и при $n < 46$ она должна быть в разряде единиц. Несложным перебором можно убедиться, что соответствующие значения $n = 4, 5, 6, 14, 15, 16, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 44, 45$ не подходят.

□

Задача 10.3. На стороне AD прямоугольника $ABCD$ отмечена точка E. На отрезке EC нашлась такая точка M, что $AB = BM$, $AE = EM$. Найдите длину стороны BC, если известно, что $ED = 16$, $CD = 12$.



Ответ: 20.

Решение. Заметим, что треугольники ABE и MBE равны друг другу по трём сторонам. Тогда $\angle BME = \angle BAE = 90°$.

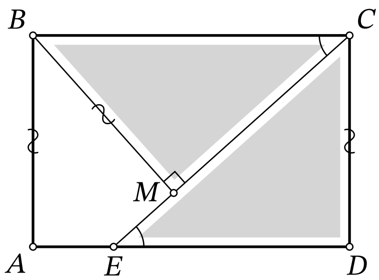


Рис. 6: к решению задачи 10.3

Из параллельности AD и BC следует $\angle BCM = \angle CED$ (рис. 6). Значит, прямоугольные треугольники BCM и CED равны по острому углу и катету $BM = AB = CD$. Используя теорему Пифагора для треугольника CDE, заключаем

$$BC = CE = \sqrt{CD^2 + ED^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20. \qquad \square$$

Задача 10.4. Дан квадратный трёхчлен $P(x)$. Известно, что уравнения $P(x) = x - 2$ и $P(x) = 1 - x/2$ имеют ровно по одному корню. Чему равен дискриминант $P(x)$?

Ответ: $-1/2$.

Решение. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Рассмотрим первое квадратное уравнение и его дискриминант:

$$ax^2 + bx + c = x - 2;$$

$$ax^2 + x(b-1) + (c+2) = 0;$$

$$D_1 = (b-1)^2 - 4a(c+2).$$

Рассмотрим теперь второе квадратное уравнение и его дискриминант:

$$ax^2 + bx + c = 1 - x/2;$$

$$ax^2 + x(b + 1/2) + (c - 1) = 0;$$

$$D_2 = (b + 1/2)^2 - 4a(c - 1).$$

Поскольку квадратные уравнения имеют по одному корню, оба этих дискриминанта равны нулю. Получаем систему

$$\begin{cases}(b-1)^2 - 4a(c+2) = 0,\\(b+1/2)^2 - 4a(c-1) = 0.\end{cases}$$

Раскрыв скобки, получим

$$\begin{cases}b^2 - 2b + 1 - 4ac - 8a = 0,\\b^2 + b + 1/4 - 4ac + 4a = 0.\end{cases}$$

Сложив первое уравнение и удвоенное второе, получим

$$b^2 - 2b + 1 - 4ac - 8a + 2 \cdot (b^2 + b + 1/4 - 4ac + 4a) = 0;$$

$$3b^2 - 12ac + 3/2 = 0;$$

$$b^2 - 4ac = -1/2.$$

А это и есть дискриминант $P(x)$. □

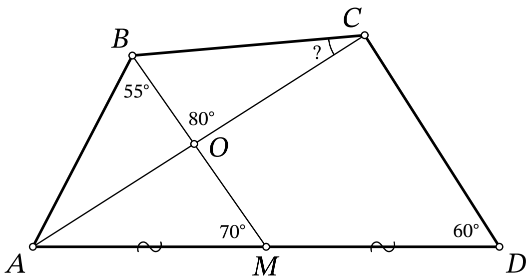
Задача 10.5. У жадины Вовочки 25 одноклассников. В честь своего Дня Рождения он принёс в класс 200 конфет. Мама Вовочки, чтобы он не съел всё сам, велела раздать конфеты так, чтобы у любых 16 его одноклассников суммарно оказалось хотя бы 100 конфет. Какое наибольшее количество конфет Вовочка может оставить себе, выполнив при этом просьбу мамы?

Ответ: 37.

Решение. Среди всех 25 одноклассников выберем 16 людей с наименьшим числом выданных конфет. Заметим, что среди них есть человек, которому выдали не меньше 7 конфет (иначе, если им всем выдали не больше 6 конфет, то суммарно им выдали не больше $16 \cdot 6 = 96$ конфет, что меньше 100). Тогда и оставшимся $25 - 16 = 9$ одноклассникам выдали не меньше 7 конфет. Тогда всего конфет суммарно выдали хотя бы $100 + 9 \cdot 7 = 163$. Соответственно, Вовочка оставил себе не более $200 - 163 = 37$ конфет.

Заметим также, что Вовочка мог себе оставить ровно 37 конфет, если остальные 163 он выдал одноклассникам так: 13 одноклассникам выдал по 7 конфет, а 12 одноклассникам выдал по 6 конфет. Тогда у любых 16 человек суммарно хотя бы $6 \cdot 12 + 7 \cdot 4 = 100$ конфет, а всего Вовочка действительно выдал $13 \cdot 7 + 12 \cdot 6 = 163$ конфеты. □

Задача 10.6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отмечена середина стороны AD — точка M. Отрезки BM и AC пересекаются в точке O. Известно, что $\angle ABM = 55°$, $\angle AMB = 70°$, $\angle BOC = 80°$, $\angle ADC = 60°$. Сколько градусов составляет угол BCA?



Ответ: 35.

Решение. Поскольку

$$\angle BAM = 180^\circ - \angle ABM - \angle AMB = 180^\circ - 55^\circ - 70^\circ = 55^\circ = \angle ABM,$$

треугольник ABM является равнобедренным, и $AM = BM$.

Заметим, что $\angle OAM = 180^\circ - \angle AOM - \angle AMO = 180^\circ - 80^\circ - 70^\circ = 30^\circ$, поэтому $\angle ACD = 180^\circ - \angle CAD - \angle ADC = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$.

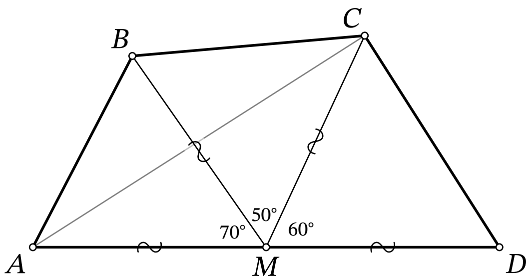


Рис. 7: к решению задачи 10.6

Проведём отрезок CM (рис 7). Поскольку в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине, имеем $CM = DM = AM = BM$. Треугольник MCD является равнобедренным с углом 60° при основании, поэтому он является равносторонним, и $\angle CMD = 60^\circ$. Тогда $\angle BMC = 180^\circ - \angle AMB - \angle CMD = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$. Поскольку треугольник BMC является равнобедренным с вершиной M, имеем $\angle CBM = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BMC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ$. Наконец,

$$\angle BCA = 180^\circ - \angle CBM - \angle BOC = 180^\circ - 65^\circ - 80^\circ = 35^\circ. \qquad \square$$

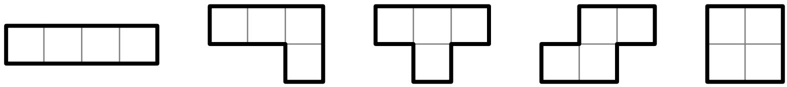
Замечание. Существуют и другие решения, использующие тот факт, что $ABCD$ является вписанным четырёхугольником с центром описанной окружности M.

Задача 10.7. Квадратную доску 30×30 разрезали по линиям сетки на 225 частей одинаковой площади. Найдите наибольшее возможное значение суммарной длины разрезов.

Ответ: 1065.

Решение. Общая длина разрезов равна сумме периметров всех фигур, уменьшенной на периметр квадрата, поделённой на 2 (каждый разрез примыкает ровно к двум фигурам). Значит, чтобы получить максимальную длину разрезов, периметры фигур должны быть максимально возможными.

Площадь каждой фигурки равна $\frac{900}{225} = 4$. А четырёхклеточных фигур всего 5:



У квадрата периметр равен 8, а у всех других фигурок — 10. Получаем, что максимальная длина разрезов не превосходит $(225 \cdot 10 - 120)/2 = 1065$.

Осталось привести пример. Из доказанного выше следует, что данный ответ получится, если мы разрежем квадрат 30×30 на любые четырёхклеточные фигурки, кроме квадрата. Заполним сначала прямоугольник 28×30 полосками 1×4, останется прямоугольник 2×30. Прямоугольник 2×24 также разрежем на полоски 1×4. Останется пустой прямоугольник 2×6, который легко можно разрезать на две фигурки в виде буквы Г и одну полоску 1×4, как показано на рис 8. □

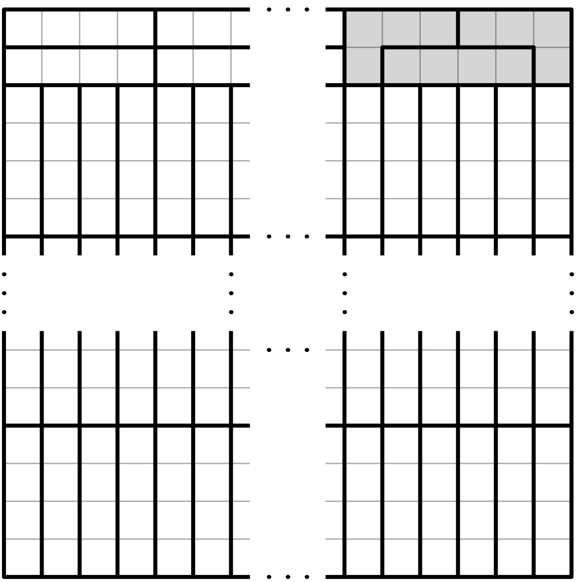


Рис. 8: к решению задачи 10.7

Задача 10.8. Натуральное число $1 \leqslant n \leqslant 221$ назовём *удачным*, если при делении 221 на n остаток нацело делится на неполное частное (при этом остаток может быть равен 0). Сколько всего удачных чисел?

Ответ: 115.

Решение. Пусть для некоторого удачного числа n неполное частное равно k, а остаток равен ks, по определению он неотрицателен и меньше делителя n (из условия следует, что k — натуральное число, а s — целое неотрицательное.) Тогда

$$221 = nk + ks = k(n + s).$$

Поскольку $221 = 13 \cdot 17$ делится на натуральное число k, получаем несколько случаев.

- Пусть $k = 1$, тогда $n + s = 221$. Поскольку $0 \leqslant s < n$, то $221 \geqslant n \geqslant \frac{n+s}{2} = 110,5 > 110$. Заметим, что все такие $n \in \{111, 112, 113, \ldots, 221\}$ являются удачными (и таких чисел ровно 111). Действительно, во всех этих случаях $221 = n \cdot 1 + (221 - n)$ остаток $(221 - n)$ неотрицателен, меньше соответствующего n, а также делится на соответствующее неполное частное 1.

- Пусть $k = 13$, тогда $n + s = 17$. Поскольку $0 \leqslant 13s < n$, то $17 = n + s > 14s$, т.е. либо $s = 0$ и $n = 17$, либо $s = 1$ и $n = 16$. Заметим, что числа $n = 16$ и $n = 17$ являются удачными. Действительно, в обоих случаях $221 = 16 \cdot 13 + 13$ и $221 = 17 \cdot 13 + 0$ остаток неотрицателен, меньше соответствующего n, а также делится на соответствующее неполное частное.

- Пусть $k = 17$, тогда $n + s = 13$. Поскольку $0 \leqslant 17s < n$, то $13 = n + s > 18s$, т.е. $s = 0$ и $n = 13$. Заметим, что $n = 13$ является удачным. Действительно, в случае $221 = 13 \cdot 17 + 0$ остаток неотрицателен, меньше соответствующего n, а также делится на соответствующее неполное частное.

- Пусть $k = 221$, тогда $n + s = 1$. Поскольку $0 \leqslant 221s < n$, то $1 = n + s > 222s$, т.е. $s = 0$ и $n = 1$. Заметим, что $n = 1$ является удачным. Действительно, в случае $221 = 1 \cdot 221 + 0$ остаток неотрицателен, меньше соответствующего n, а также делится на соответствующее неполное частное.

Итого всего удачных чисел $111 + 2 + 1 + 1 = 115$. □

11 класс

Задача 11.1. Петя выписал в ряд десять натуральных чисел следующим образом: первые два числа он выписал произвольным образом, а каждое следующее, начиная с третьего, равнялось сумме двух предыдущих. Найдите четвёртое число, если седьмое равно 42, а девятое равно 110.

Ответ: 10.

Решение. Из условия следует, что восьмое число равно разности девятого и седьмого, т.е. $110 - 42 = 68$. Тогда шестое равно $68 - 42 = 26$, пятое равно $42 - 26 = 16$, четвёртое равно $26 - 16 = 10$.

Замечание. На самом деле числа на доске — удвоенные числа Фибоначчи. □

Задача 11.2. В магазине продаётся 9 наушников, 13 компьютерных мышек и 5 клавиатур. Кроме этого ещё есть 4 набора «клавиатура и мышка» и 5 наборов «наушники и мышка». Сколькими способами можно купить три предмета: наушники, клавиатуру и мышку?

Ответ: 646.

Решение. Разберём случаи того, покупался ли какой-то набор.

- Пусть покупался набор «клавиатура и мышка», тогда к нему докупались наушники. Получается ровно $4 \cdot 9 = 36$ способов совершить покупку.
- Пусть покупался набор «наушники и мышка», тогда к нему докупалась клавиатура. Получается ровно $5 \cdot 5 = 25$ способов совершить покупку.
- Пусть не покупался ни один набор, тогда покупались наушники, мышка и клавиатура по отдельности. Получается ровно $9 \cdot 13 \cdot 5 = 585$ способов совершить покупку.

Итого существует ровно $36 + 25 + 585 = 646$ искомых способов. □

Задача 11.3. Учитель написал на доске число 1818. Вася заметил, что если между разрядами сотен и десятков написать знак умножения, то значение полученного выражения будет точным квадратом ($18 \times 18 = 324 = 18^2$). А какое ближайшее следующее за 1818 четырёхзначное число обладает таким же свойством?

Ответ: 1832.

Решение. Поскольку надо найти ближайшее четырёхзначное число, попробуем найти его в виде $\overline{18ab}$. Тогда число $18 \cdot \overline{ab} = 3^2 \cdot (2 \cdot \overline{ab})$ должно быть точным квадратом. Отсюда следует, что и $2 \cdot \overline{ab}$ должно быть точным квадратом. Ясно, что $\overline{ab} \in \{19, 20, 21 \ldots, 31\}$ под это условие не подходят, а $\overline{ab} = 32$ подходит. Значит, ответ в задаче — число 1832.

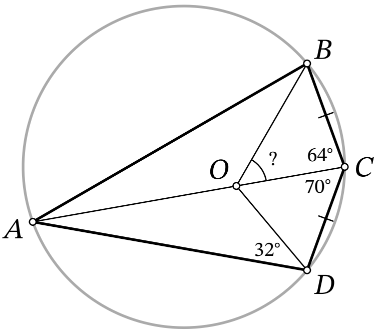
Замечание. Тот же ответ можно было получить, доказав, что $\overline{ab} = 2s^2$ для некоторого натурального $s > 3$. □

Задача 11.4. Известно, что $\frac{7}{13} + \sin\varphi = \cos\varphi$ для некоторого действительного φ. Чему равно $\sin 2\varphi$?

Ответ: $\frac{120}{169}$.

Решение. Из условия следует, что $\frac{7}{13} = \cos\varphi - \sin\varphi$. Возведя это равенство в квадрат, получим $\frac{49}{169} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi = 1 - \sin 2\varphi$. Значит, $\sin 2\varphi = 1 - \frac{49}{169} = \frac{120}{169}$. □

Задача 11.5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Известно, что $BC = CD$, $\angle BCA = 64^\circ$, $\angle ACD = 70^\circ$. На отрезке AC отмечена точка O такая, что $\angle ADO = 32^\circ$. Сколько градусов составляет угол BOC?



Ответ: 58.

Решение. Как известно, в окружности на равные хорды опираются вписанные углы либо равные, либо дополняющие друг друга до 180°. Поскольку $BC = CD$ и $\angle BAD < 180^\circ$, получаем, что $\angle BAC = \angle DAC$.

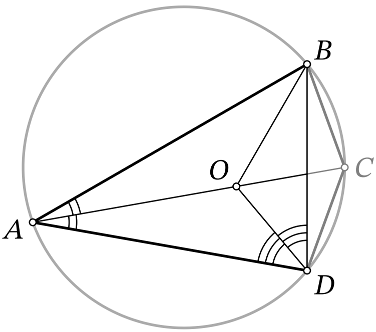


Рис. 9: к решению задачи 11.5

Поскольку $\angle BDA = \angle BCA = 64^\circ$, получаем, что $\angle BDO = \angle ADO = 32^\circ$. Следовательно, точка O лежит на двух биссектрисах треугольника ABD, т. е. является его точкой пересечения биссектрис (рис. 9). Тогда

$$\angle BOC = \angle BAO + \angle ABO = \frac{\angle BAD + \angle ABD}{2} = \frac{180^\circ - \angle BDA}{2} = \frac{180^\circ - 64^\circ}{2} = 58^\circ. \qquad \square$$

Замечание. Решение можно было завершить и по-другому: поскольку O является точкой пересечения биссектрис треугольника ABD, то по лемме о трезубце $CD = CB = CO$, откуда $\angle COB$ находится без труда.

Задача 11.6. Олег выписал на доску несколько составных натуральных чисел, меньших 1500. Оказалось, что наибольший общий делитель любых двух из них равен 1. Какое наибольшее количество чисел мог выписать Олег?

Ответ: 12.

Решение. Простые числа, меньшие $\sqrt{1500}$, назовём *маленькими*. Таких чисел ровно 12: это $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$.

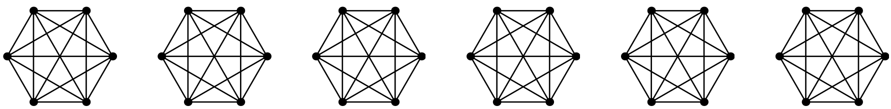
Заметим, что у каждого числа Олега есть маленький делитель (иначе оно было бы не меньше $43^2 > 1500$), а также у разных чисел разные маленькие делители (иначе НОД этих чисел был бы больше 1). Значит, чисел у Олега не меньше, чем всего маленьких чисел, т.е. не меньше 12.

Пример на 12 чисел строится легко: это числа $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2$.
□

Задача 11.7. Архипелаг состоит из $N \geqslant 7$ островов. Любые два острова соединены не более, чем одним мостом. Известно, что с каждого острова ведёт не более, чем 5 мостов, а среди любых 7 островов обязательно есть два, соединённые мостом. Какое наибольшее значение может принимать N?

Ответ: 36.

Решение. В архипелаге может быть 36 островов, например, так: они образовывают 6 групп по 6 островов, причём два острова соединены мостом в том и только в том случае, если они находятся в одной группе. Ясно, что с каждого острова ведёт ровно 5 мостов, а среди любых 7 островов обязательно есть два, находящиеся в одной группе, и они соединёны друг с другом мостом.



Предположим, островов может быть $N \geqslant 37$. Выберем любой из островов, назовём его A, он соединён не более чем с пятью другими островами. Временно забудем эти не более чем 6 островов, рассмотрим оставшиеся хотя бы $N-6$ островов (среди которых никто не соединён с A). Выберем любой из этих островов, назовём его B, он соединён не более чем с пятью другими островами. Временно забудем эти не более чем 6 островов, рассмотрим оставшиеся хотя бы $N-12$ островов (среди которых никто не соединён с A и B), и так далее. Забыв шестой остров F и соединённые с ним не более чем 5 островов, останется хотя бы $N - 36 \geqslant 1$ остров (среди которых никто не соединён с A, B, C, D, E, F). Выберем любой из этих островов, назовём его G. Тогда среди островов A, B, C, D, E, F, G нет соединённых мостом. Противоречие.
□

Задача 11.8. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$

- боковые грани SAB, SBC, SCD, SDA имеют площади 9, 9, 27, 27 соответственно;
- двугранные углы при рёбрах AB, BC, CD, DA равны;
- четырёхугольник $ABCD$ — вписанный, и его площадь равна 36.

Найдите объём пирамиды $SABCD$.

Ответ: 54.

Решение. Обозначим угол между боковой гранью и основанием пирамиды за α.

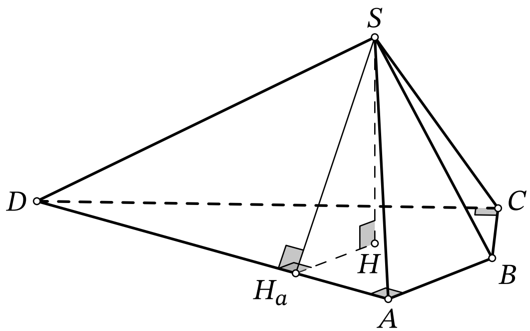


Рис. 10: к решению задачи 11.8

Проведём высоту SH к основанию пирамиды, её длину обозначим за h (рис. 10). Также проведём высоты SH_a, SH_b, SH_c, SH_d к ребрам DA, AB, BC, CD соответственно. Так как $SH_a \perp DA$ и (по теореме о трёх перпендикулярах) $HH_a \perp DA$, то $\angle SH_aH = \alpha$. Из прямоугольного треугольника SH_aH имеем $SH_a = SH/\sin(\alpha)$.

Аналогично получим, что то же значение принимают и высоты SH_b, SH_c и SH_d. Обозначим их длину за $h_1 = h/\sin(\alpha)$. Используя значения площадей боковых граней, получаем, что $DA = 27x$, $AB = 9x$, $BC = 9x$, $CD = 27x$, где $x = 2/h_1$.

Так как треугольники BAD и BCD равны по трём сторонам, то четырёхугольник $ABCD$ — дельтоид (симметричен относительно диагонали BD). Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ углы DAB и DCB равны и дополняют друг друга до 180°, поэтому они равны по 90°.

Площадь прямоугольного треугольника DAB, таким образом, равна $\frac{1}{2} \cdot 27x \cdot 9x = \frac{1}{2}243x^2$; площадь всего основания в два раза больше, и равна $243x^2$. По условию она равна 36, откуда находим $x = \sqrt{36/243} = 2/(3\sqrt{3})$, то есть $h_1 = 2/x = 3\sqrt{3}$.

Теперь найдём α. Для этого рассмотрим, как меняются площади боковых граней при проекции на $ABCD$. Высоты боковых граней, проведенные из вершины S, умножаются на $\cos(\alpha)$, а соответствующие основания треугольников — не меняются; значит, площади умножаются на $\cos(\alpha)$. С другой стороны, объединение проекций боковых граней — это в точности четырёхугольник $ABCD$, откуда получаем $36 = (9 + 9 + 27 + 27) \cdot \cos(\alpha)$. Следовательно, $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}$, то есть $\alpha = \pi/3$.

Наконец, находим $h = h_1 \sin(\alpha) = 4{,}5$ и объем пирамиды $\frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4.5 = 54$. $\square$