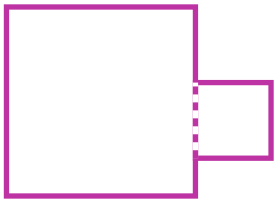
4 класс

4-1. Катя приставила квадрат с периметром 40 см к квадрату с периметром 100 см так, как показано на рисунке. Чему равен периметр получившейся фигуры в сантиметрах?



Ответ. 120.

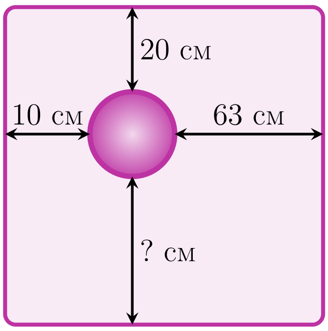
Решение. Если сложить периметры двух квадратов, то получится $100 + 40 = 140$ см. Это больше периметра получившейся фигуры на удвоенную сторону меньшего квадрата. Сторона меньшего квадрата равна $40 : 4 = 10$ см. Итого ответ $140 - 20 = 120$ см.

4-2. Есть несколько пакетов с яблоками. В каждом лежит или 12, или 6 яблок. Сколько всего может быть яблок, если известно, что их всего не меньше 70 и не больше 80? Укажите все варианты.

Ответ. 72 или 78.

Решение. Количество яблок в каждом пакете делится на 6, поэтому общее количество яблок тоже делится на 6. В данном диапазоне есть только два числа, делящиеся на 6: это 72 и 78.

4-3. На квадратном столе лежит круглая тарелка. Расстояния от краев тарелки до краев стола показаны на рисунке (изображение не в масштабе). Чему равно расстояние от края тарелки до нижнего края стола?



Ответ. 53.

Решение. Заметим, что если сложить 10, 63 и диаметр тарелки, то получится то же самое, как если сложить 20, неизвестное число и диаметр тарелки. Поэтому $10 + 63$ равно сумме 20+неизвестное число. Отсюда неизвестное число равно 53.

4-4. В коробке лежат цветные карандаши.

Вася сказал: «В коробке есть хотя бы четыре синих карандаша».

Коля сказал: «В коробке есть хотя бы пять зелёных карандашей».

Петя сказал: «В коробке есть хотя бы три синих и хотя бы четыре зелёных карандаша».

Миша сказал: «В коробке есть хотя бы четыре синих и хотя бы четыре зелёных карандаша».

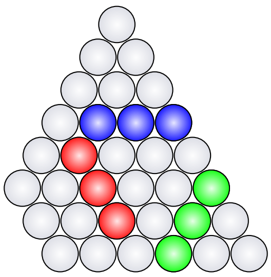
Известно, что трое ребят сказали правду, а один — ошибся. Кто ошибся?

Ответ. Коля.

Решение. Синих карандашей должно быть хотя бы четыре, так как иначе ошибутся хотя бы двое ребят — Вася и Миша. Поэтому все утверждения про синие карандаши — верные.

Зелёных карандашей должно быть хотя бы четыре, так как иначе ошибутся трое ребят — Коля, Петя и Миша. Больше или равно пяти их быть не может — тогда никто не ошибется, поэтому зелёных карандашей четыре, а ошибся — Коля.

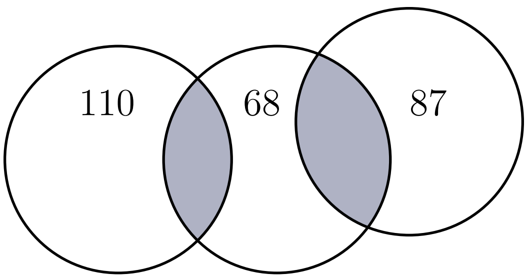
4-5. Дана фигура, состоящая из 33 кругов. Нужно выбрать три круга, идущих подряд в одном из направлений. Сколькими способами это можно сделать? На рисунке приведены три способа из искомых.



Ответ. 57.

Решение. Количество вариантов вдоль длинной стороны равно $1+2+3+4+5+6=21$. Вдоль каждого из двух других направлений — $4+4+4+3+2+1 = 18$. Всего вариантов $21 + 18 \cdot 2 = 57$.

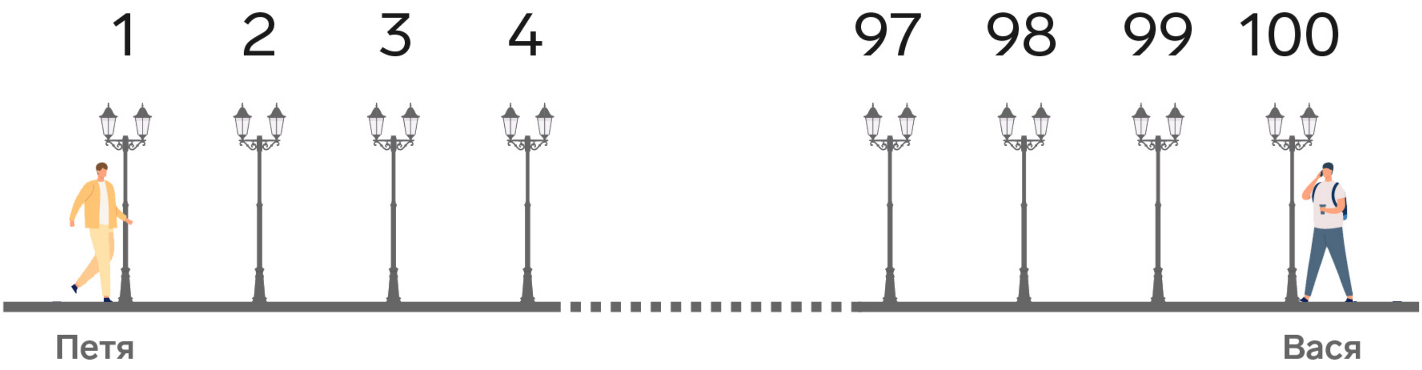
4-6. В каждый круг ворона положила поровну зернышек. На картинке указано количество зернышек в белых частях. Сколько всего зернышек лежит в обеих серых частях в сумме?



Ответ. 61.

Решение. Так как в первом и втором кругах лежит поровну зёрнышек, то во второй серой области должно лежать $110 - 68 = 42$ зёрнышка. Аналогично в первой серой области лежит $87 - 68 = 19$ зёрнышек. Общее количество зёрнышек в обеих серых областях равно $42 + 19 = 61$.

4-7. Вдоль прямой аллеи через равные промежутки стоят 100 фонарей, пронумерованные по-порядку числами от 1 до 100. Одновременно с разных концов аллеи навстречу друг другу с разными постоянными скоростями вышли Петя и Вася (Петя — от первого фонаря, Вася — от сотого). Когда Петя был у 22-го фонаря, Вася был у 88-го фонаря. У какого фонаря произойдет их встреча? Если встреча произойдет между двумя фонарями, то в ответе укажите меньший номер из этих двух.



Ответ. У 64-го фонаря.

Решение. Всего есть 99 промежутков между фонарями. Из условия следует, что пока Петя проходит 21 промежуток, Вася проходит 12 промежутков. Что в сумме ровно в три раза меньше, чем длина аллеи. Поэтому Петя должен пройти до места встречи в три раза больше, чем до 22-го фонаря, т.е. $21 \cdot 3 = 63$ промежутка. И окажется у 64-го фонаря.

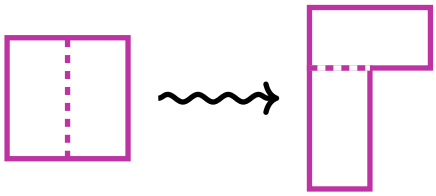
4-8. В шахматный клуб ходят 90 детей. На занятии они разделись на 30 групп по 3 человека, и в каждой группе каждый сыграл с каждым по одной партии. Других партий не было. Всего было сыграно 30 партий «мальчик+мальчик» и 14 партий «девочка+девочка». Сколько было «смешанных» групп, то есть таких групп, в которых были как мальчик, так и девочка?

Ответ. 23.

Решение. Всего было 90 партий, значит, партий «мальчик+девочка» было $90 - 30 - 14 = 46$. В каждой смешанной группе играется по две партии «мальчик+девочка», а в несмешанных группах таких партий нет. Итого было ровно $56/2 = 28$ смешанных групп.

5 класс

5-1. Квадрат со стороной 100 разрезали на два равных прямоугольника. Их приложили друг к другу так, как показано на рисунке. Найдите периметр получившейся фигуры.



Ответ. 500.

Решение. Периметр фигуры состоит из 3-х отрезком длины 100 и 4-х отрезков длины 50. Следовательно длина периметра равна

$$3 \cdot 100 + 4 \cdot 50 = 500.$$

5-2. В спортивном турнире участвует команда из 10 человек. Регламент предусматривает, что на поле всегда находятся по 8 игроков команды, меняясь время от времени. Продолжительность матча составляет 45 минут, и все 10 участников команды должны играть одинаковое количество минут. Сколько минут каждый игрок будет на поле во время игры?

Ответ. 36.

Решение. Всего игроки проведут на поле $8 \cdot 45 = 360$ минут. Это время надо разделить поровну между 10-ю игроками, поэтому каждый будет на поле $360/10 = 36$ минут.

5-3. Сколько существует двузначных чисел, у которых хотя бы в одном из разрядов стоит цифра меньшая, чем в том же разряде у числа 35?

Например, числа 17 и 21 подходят, а числа 36 и 48 — нет.

Ответ. 55.

Решение. Сначала найдём количество двузначных чисел, которые не подходят под условие. В разряде единиц может стоять любая цифра от 5 до 9, в разряде десятков — от 3 до 9. Всего чисел, которые нам не подходят, будет ровно $7 \cdot 5 = 35$. Теперь можно посчитать количество двузначных чисел, которые подходят под условие: надо от их общего количества, равного 90, отнять количество не подходящих чисел: $90 - 35 = 55$.

5-4. Андрей, Борис, Владимир и Дмитрий высказали по два утверждения. Для каждого мальчика одно из его утверждений оказалось верным, а другое — неверным.

Андрей: «Борис не самый высокий среди нас четверых». «Владимир самый низкий среди нас четверых».

Борис: «Андрей самый старший в комнате». «Андрей самый низкий в комнате».

Владимир: «Дмитрий выше меня». «Дмитрий старше меня».

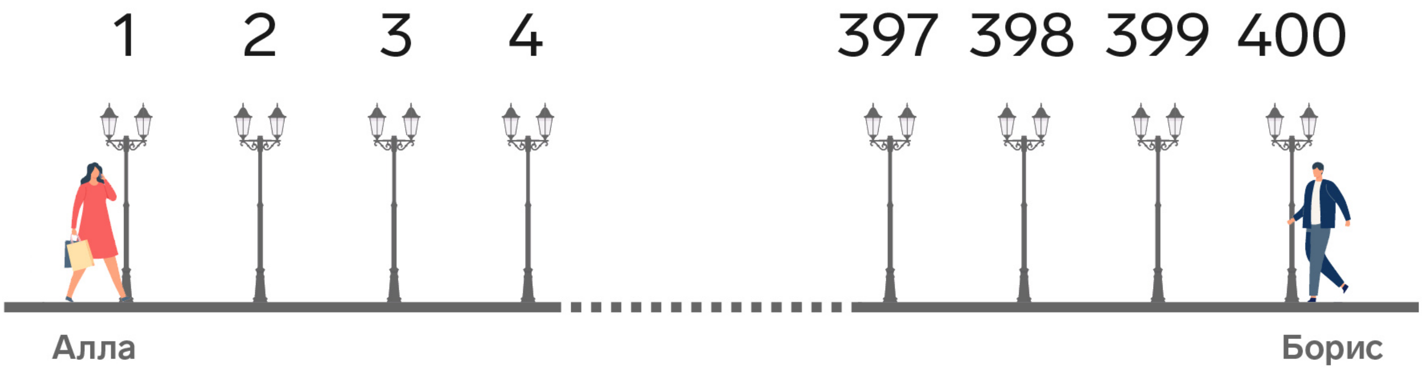
Дмитрий: «Оба утверждения Владимира верны». «Я самый старший человек в комнате».

Известно, что среди них нет двух мальчиков одного роста или одного возраста. Как зовут самого высокого мальчика?

Ответ. Владимир.

Решение. Первое утверждение Дмитрия — неверное, так как противоречит условию задачи. Поэтому Дмитрий — самый старший. Следовательно, первое утверждение Бориса неверно, поэтому Андрей самый низкий. Из этого следует, что второе утверждение Андрея неверно, поэтому Борис не самый высокий. Так же второе утверждение Владимира верно, поэтому Дмитрий не выше Владимира. Тогда на роль самого высокого может подходить только Владимир.

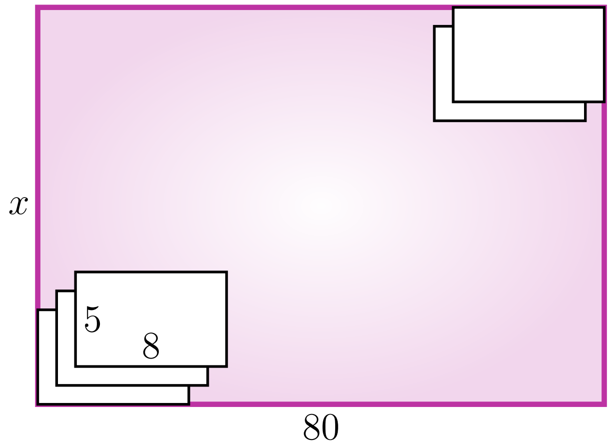
5-5. Вдоль прямой аллеи через равные промежутки стоят 400 фонарей, пронумерованные по-порядку числами от 1 до 400. Одновременно с разных концов аллеи навстречу друг другу с разными постоянными скоростями вышли Алла и Борис (Алла от первого фонаря, Борис — от четырёхсотого). Когда Алла была у 55-го фонаря, Борис был у 321-го фонаря. У какого фонаря произойдет их встреча? Если встреча произойдет между двумя фонарями, то в ответе укажите меньший номер из этих двух.



Ответ. У 163-го фонаря.

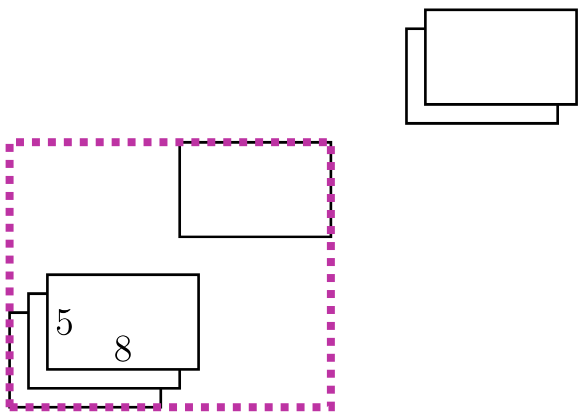
Решение. Всего есть 399 промежутков между фонарями. Из условия следует, что пока Алла проходит 54 промежутка, Борис проходит 79 промежутков. Заметим, что $54 + 79 = 133$, что ровно в три раза меньше, чем длина аллеи. Поэтому Алла должна пройти до места встречи в три раза больше, чем до 55-го фонаря, т.е. $54 \cdot 3 = 162$ промежутка. И окажется у 163-го фонаря.

5-6. На прямоугольный стол размера x см $\times$ 80 см кладут одинаковые листы бумаги размера 5 см $\times$ 8 см. Первый лист примыкает к левому нижнему углу, а каждый следующий кладут на один сантиметр выше и на один сантиметр правее предыдущего. Последний же лист примыкает к правому верхнему углу. Чему равна длина x в сантиметрах?



Ответ. 77.

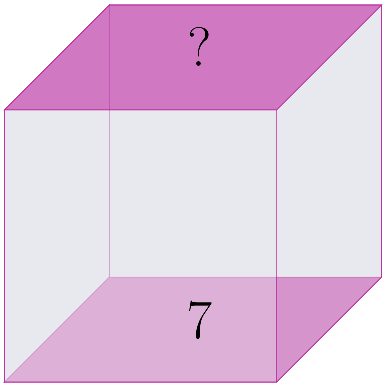
Решение I. Пусть мы положили очередной лист бумаги. Давайте посмотрим на высоту и ширину прямоугольника, для которого он будет в правом верхнем углу.



Назовём такой прямоугольник *текущим*. Заметим, что у каждого нового текущего прямоугольника и ширина, и высота на 1 см больше, чем у предыдущего. Исходно, когда лежал всего один лист бумаги, ширина большого прямоугольника была 8 см, а в конце — 80 см. Итак, всего было добавлено $(80-8):1=72$ листа бумаги. Высота текущего прямоугольник также увеличилась на $72 \cdot 1$ см, исходно она была 5, а значит $x=5+72=77$.

Решение II. Как и в первом решении, давайте смотреть на длину и ширину текущих прямоугольников. Вновь заметим, что у каждого нового текущего прямоугольника и длина, и ширина на 1 см больше, чем у предыдущего. Но вывод теперь сделаем другой: а именно, **разность** ширины и высоты текущего прямоугольника всегда одна и та же! (Такая величина, которая не меняется в ходе некоторого процесса, называется *инвариантом.*) Поскольку исходно ширина была больше высоты на $8-5=3$ см, то и в конце она должна быть больше на 3 см, т.е. ответ $x=80-3=77$ см.

5-7. На гранях игрального кубика написаны числа 6, 7, 8, 9, 10, 11. Кубик бросили дважды. Первый раз сумма чисел на четырёх «вертикальных» (то есть кроме нижней и верхней) гранях была равна 33, а во второй раз — 35. Какое число может быть написано на грани, противоположной грани с числом 7? Найдите все возможные варианты.



Ответ. 9 или 11.

Решение. Общая сумма чисел на гранях равна 6+7+8+9+10+11=51. Так как в первый раз сумма чисел на четырёх гранях равна 33, то сумма чисел на двух оставшихся гранях равна $51-33=18$. Аналогично, сумма чисел на двух других противоположных гранях равна $51-35=16$. Тогда получается, что на третьей паре противоположных граней сумма равна $51-16-18=17$. Рассмотрим три случая, в какую сумму (16, 17 или 18) попадет число 7:

- $7+9=16$, такое может быть, если в парах будут числа $6+11=17$ и $8+10=18$.
- $7+10=17$, такого не может быть, так число 6 не может входить в сумму 16 (ведь число 10 занято), и не может входить в сумму 18 (ведь нет числа 12).
- $7+11=18$, такое может быть, если в парах будут числа $6+10=16$ и $8+9=17$.

5-8. В кружок «Юный фотограф» ходят 300 детей. На занятии они разделились на 100 групп по 3 человека, и в каждой группе каждый сделал одну фотографию двух других из своей группы. Больше никто никого не фотографировал. Всего получилось 100 фотографий «мальчик+мальчик» и 56 фотографий «девочка+девочка». Сколько было «смешанных» групп, то есть таких групп, в которых были как мальчик, так и девочка?

Ответ. 72.

Решение. Всего было 300 фотографий, значит, фотографий «мальчик+девочка» было $300-100-56=144$. Каждая смешанная группа даёт по две фотографии «мальчик+девочка», а несмешанные группы таких фотографий не дают. Итого было ровно $144/2=72$ смешанные группы.

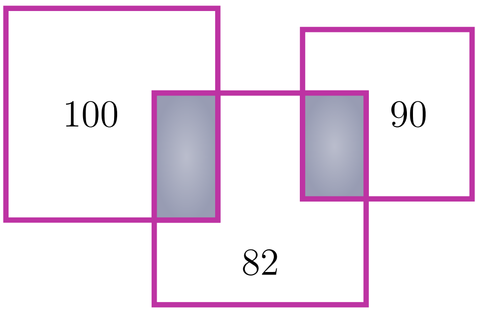
6 класс

6-1. Учитель физкультуры построил класс в шеренгу так, чтобы все смотрели на него. Правее Коли стоят 12 человек, слева от Саши — 20 человек, а справа от него же — 8 человек. Сколько человек стоит слева от Коли?

Ответ. 16.

Решение. Так как слева от Саши 20 человек, и справа от него же — 8 человек, то всего в шеренге, не считая Саши, 28 человек. Поэтому вместе с Сашей получается 29 человек в классе. Тогда слева от Коли находятся $29 - 12 - 1 = 16$ человек (сначала отняли 12 человек, кто стоит правее Коли, а потом самого Колю).

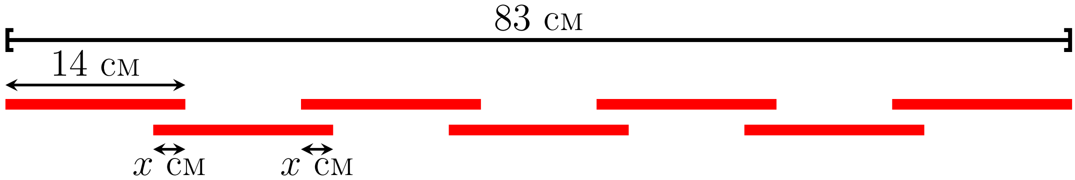
6-2. С дрона были сделаны три снимка местности, на всех снимках зафиксировано поровну деревьев. На рисунке указаны количества деревьев в белых областях. Чему равно суммарное количество деревьев в серых областях?



Ответ. 26.

Решение. Так как в первом и втором прямоугольниках поровну деревьев, то во второй серой области должно быть $100 - 82 = 18$ деревьев. Аналогично, во второй серой области находится $90 - 82 = 8$ деревьев. Общее количество деревьев в обеих серых областях равно $18 + 8 = 26$.

6-3. Красные отрезки на рисунке имеют равную длину. Они перекрываются по одинаковым отрезочкам длины x см. Чему равно x в сантиметрах?



Ответ. 2.5.

Решение. Сложим длины всех красных отрезков, получится 98 см. Почему получилось больше 83 см — больше расстояния от края до края? Потому что дважды посчитаны все перекрывающиеся части красных отрезков. Перекрывающихся частей 6, длина каждой равна x. Значит, разница $98 - 83 = 15$ равна $6x$, откуда $x = 2.5$.

6-4. В магазине «Копеечка» любой предмет продается за сколько-то рублей и 99 копеек (возможно, за 0 рублей и 99 копеек). У разных предметов может быть разная цена. Коля сделал покупку на 200 руб 83 коп. Сколько предметов он мог купить? Найдите все возможные варианты.

Ответ. 17 или 117.

Решение. Будем покупать предметы по одному. Тогда количество копеек каждый раз будет уменьшаться на 1, при этом после 0 копеек идёт 99 копеек. Первый раз мы получаем целое число рублей и 83 копейки, купив $100 - 83 = 17$ предметов. Этот вариант подходит: например, можно было купить 16 предметов по 0 руб 99 коп, и ещё один предмет на оставшуюся сумму.

Второй раз мы получим целое число рублей и 83 копейки, купив уже 117 предметов. Этот вариант тоже подходит: например, можно было купить 116 предметов по 0 руб 99 коп, и ещё один предмет на оставшуюся сумму.

Третий раз мы получим целое число рублей и 83 копейки, купив уже 217 или более предметов. Этот вариант не подходит: на 217 предметов мы потратим хотя бы $217 \cdot 99$ копеек, что явно больше 201 рубля. Значит, Коля мог купить только 17 или 117 предметов.

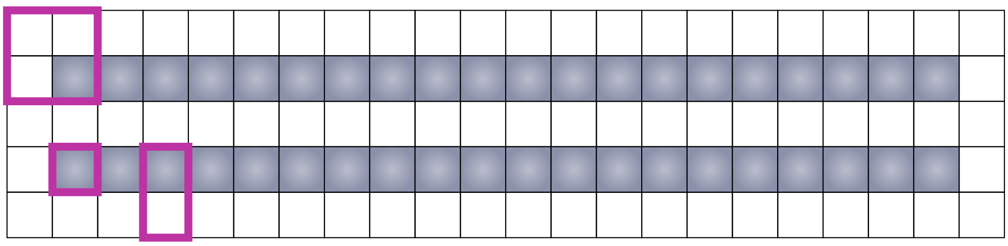
6-5. Бабушка испекла 21 партию пирожков по N штук в каждой, $N > 70$. Затем она все пирожки разложила на несколько подносов по 70 штук. Чему равно наименьшее возможное значение N?

Ответ. 80.

Решение. Общее количество испечённых пирожков равно $21 \cdot N$. Это число должно делиться на 70, чтобы его можно было разложить на несколько подносов по 70 штук. $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, и 21 уже делится на 7. Значит, N должно делиться на 10, и наименьшее такое N равно 80.

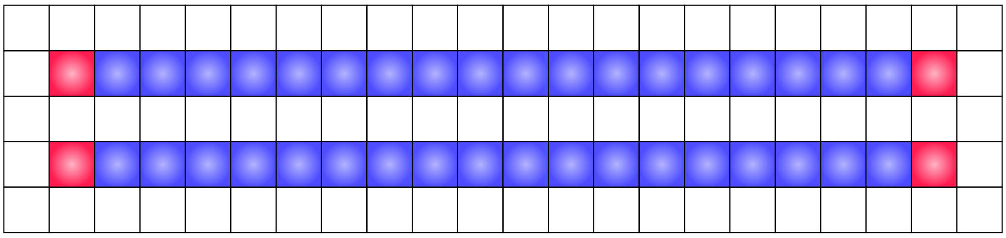
6-6. Сколько на этой картинке клетчатых прямоугольников, содержащих ровно одну серую клетку? На картинке $2 \cdot 20 = 40$ серых клеток.

Для примера обведены три таких прямоугольника.



Ответ. 176.

Решение. Раскрасим серые клеточки в синий и красный цвета так, как показано на рисунке. Прямоугольники бывают двух типов: содержащие синюю клеточку и содержащие красную клеточку.



Каждую синюю клеточку содержит 4 прямоугольника, синих клеточек 36, следовательно, прямоугольников с синей клеточкой $36 \cdot 4 = 144$.

Каждую красную клеточку содержит 8 прямоугольников, красных клеточек 4, следовательно, прямоугольников с синей клеточкой $4 \cdot 8 = 32$.

Итого, всего получается $144 + 32 = 176$ прямоугольников.

6-7. В кондитерском магазине продавщица выложила на прилавок в ряд 91 конфету нескольких сортов. Оказалось, что между каждыми двумя конфетами одного сорта лежит чётное число конфет. Какое наименьшее число сортов могло быть?

Ответ. 46.

Решение. Докажем, что не могло быть трёх и более конфет одного сорта. В самом деле, пусть конфеты одного сорта A, B и C лежат именно в таком порядке. Пусть между A и B находится $2x$ конфет, между B и C — $2y$ конфет, тогда между A и C находится $2x + 2y + 1$ конфета, то есть нечётное число конфет, что противоречит условию.

Так как каждого сорта не более, чем по 2 конфеты, то получается не менее чем 46 сортов. Приведём пример, что 46 сортов могло быть. Например, конфеты могут лежать парами: две первого сорта, две второго сорта и так 45 пар, а в конце ещё одна конфета 46-го сорта. Есть много других примеров.

6-8. Пять девочек сыграли несколько партий в настольный теннис за одним столом. В каждый момент времени играли какие-то две девочки, а остальные три отдыхали. Проигравшая в партии девочка шла отдыхать, а её место за столом занимала девочка, которая отдыхала больше всего партий; если таких девочек было несколько, то любая из них. Ничьих в теннисе не бывает. Аня сыграла 4 партии, Белла — 6 партий, Валя — 7 партий, Галя — 10 партий, а Даша — 11 партий. Укажите номера всех партий, в которых Аня проиграла.

Ответ. 4, 8, 12, 16.

Решение. Заметим, что суммарно девочки приняли участие в $4+6+7+10+11 = 38$ партиях, в каждой партии принимали участие две девочки, поэтому всего было 19 игр. Ключевое соображение решения состоит в том, что девочка не может не играть четыре партии подряд. Тогда играть 4 партии Аня могла только так: 3 раза не играла, играла, 3 раза не играла, играла, и т.д. Следовательно, Аня играла в партиях с номерами 4, 8, 12, 16, и во всех проиграла.

Комментарий. Девочки действительно могли играть так, как написано в условии: Б–Г, В–Г, Д–Г, А–Г, Б–Г, В–Г, Г–Д, А–Д, Б–Д, В–Д, Г–Д, А–Д, Д–Б, Б–В, Г–В, А–В, В–Д, Д–Б, Д–Г.

7 класс

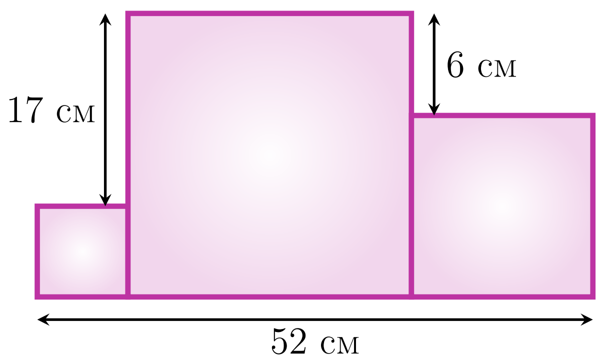
7-1. У Пети есть наклейки. Если он раздаст своим друзьям по 5 наклеек, то у него останется 8 наклеек. Если он захочет раздать своим друзьям по 6 наклеек, то не хватит 11 наклеек. Сколько друзей у Пети?

Ответ. 19.

Решение I. Пусть Петя раздал всем друзьям по 5 наклеек. Далее он хочет раздать каждому другу ещё по одной наклейке. Для этого он должен потратить $8 + 11 = 19$ наклеек, при этом каждому другу он даёт по одной наклейке, поэтому у него 19 друзей.

Решение II. Пусть у Пети x друзей. Тогда $5x + 8 = 6x - 11$, откуда $x = 19$.

7-2. На рисунке изображено три квадрата. Найдите сторону левого квадрата. Ответ дайте в сантиметрах.



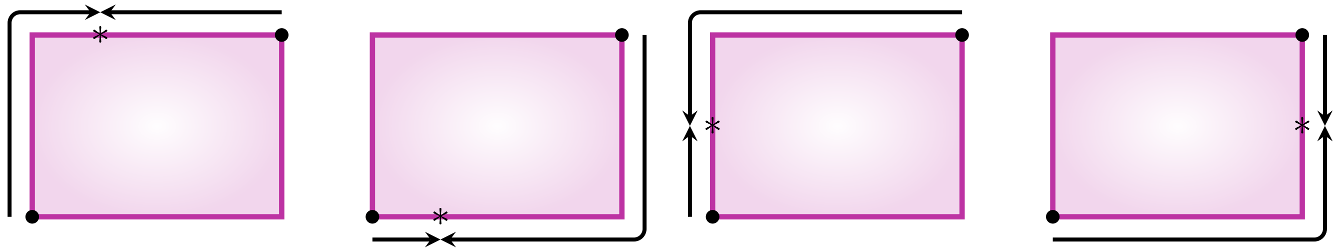
Ответ. 8.

Решение. Обозначим сторону левого квадрата через x. Тогда сторона среднего квадрата равна $x+17$, а сторона самого правого на 6 см меньше, то есть равна $x+11$. При этом сумма сторон всех трёх квадратов равна 52. Отсюда получаем уравнение $x + (x + 17) + (x + 11) = 52$, из которого находим $x = 8$.

7-3. Секретный объект представляет собой прямоугольник 200×300 метров. Снаружи объекта в каждом из четырёх углов стоит по одному охраннику. Нарушитель подобрался снаружи к периметру секретного объекта, и все охранники побежали к нему кратчайшими путями по внешнему периметру (нарушитель при этом стоял на месте). Три охранника пробежали до нарушителя в сумме 850 метров. Сколько метров пробежал до нарушителя четвёртый охранник?

Ответ. 150.

Решение. Заметим, что где бы ни находился нарушитель, два охранника в противоположных углах в сумме пробегут расстояние, равное полупериметру.



Поэтому все 4 охранника пробегут в сумме периметр (два в диагонально противоположных углах пробегут в сумме полупериметр, и два других тоже). Поэтому четвёртый охранник пробежит расстояние, дополняющее 850 до периметра, равного 1000, то есть 150 метров.

7-4. В финал конкурса красоты среди жирафов прошли два жирафа: Высокий и Пятнистый. 135 голосующих поделены на 5 округов, каждый округ поделён на 9 участков, а на каждом участке по 3 голосующих. Голосующие большинством выбирают победителя на своём участке; в округе побеждает жираф, победивший в большинстве участков округа; наконец, победителем финала объявляется жираф, победивший в большинстве округов. Победил жираф Высокий. Какое наименьшее число голосующих могли проголосовать за него?

Ответ. 30.

Решение. Чтобы Высокий победил в финале, он должен победить в 3-х округах. Чтобы победить в округе, Высокий должен победить в 5-ти участках этого округа. Итого, нужно победить хотя бы в $3 \cdot 5 = 15$ участках. Чтобы победить на участке нужно, чтобы за тебя проголосовали хотя бы 2 голосующих. Итого, необходимо хотя бы 30 голосующих.

Комментарий. В задачах с вопросами «какое наибольшее» и «какое наименьшее» обычно решение состоит из двух частей: оценки и примера. *Оценка* — это доказательство, что большего (или меньшего, в зависимости от вопроса) ответа добиться нельзя, а *пример* — это доказательство, что указанного ответа добиться можно.

В решении выше мы не привели пример (т.е. не доказали), что 30 голосующих достаточно. Для полноты решению не хватает фразы «Из рассуждений выше понятно, что 30 голосующих за Высокого может быть достаточно: по 2 голосующих на 5 участках каких-то 3 округов».

7-5. В ряд стоят 1000 игрушечных медведей. Медведи бывают трёх цветов: белые, бурые и чёрные. Среди любых трёх последовательных медведей есть игрушка каждого из цветов. Искандер пытается угадать цвета медведей. Он высказал пять догадок:

- 2-й слева медведь белый;
- 20-й слева медведь бурый;
- 400-й слева медведь чёрный;
- 600-й слева медведь бурый;
- 800-й слева медведь белый.

Оказалось, что ровно одна из его догадок неверна. Каким может быть номер медведя, цвет которого Искандер НЕ угадал? Выберите все возможные ответы.

Ответ. 20.

Решение. Так как среди любых трёх последовательных медведей есть медведь каждого из цветов, то номера всех медведей какого-то цвета имеют одинаковый остаток при делении на 3. Действительно, посмотрим на медведей с номерами n, $n+1$ и $n+2$, а также с номерами $n+1$, $n+2$ и $n+3$. И там, и там будут медведи всех трёх цветов только если медведи с номерами n и $n+3$ одного цвета.

Хотя бы одна из догадок «20-й медведь бурый» и «600-й медведь бурый» неверна: ведь числа 200 и 600 дают разные остатки при делении на 3. Также неверна хотя бы одна из догадок «2-й медведь белый» и «20-й медведь бурый»: ведь числа 2 и 20 дают одинаковые остатки при делении на 3, следовательно, медведи с этими номерами должны быть одного цвета. Значит, догадка «20-й медведь бурый» точно неверна.

Комментарий. Как следует из решения, описанная в условии ситуация возможна: все медведи с номерами, дающими остаток 1 при делении на 3 должны быть чёрными, остаток 2 — белыми, остаток 0 — бурыми. Это — единственно возможная ситуация.

7-6. В орнитологическом парке живут птицы нескольких видов, всего 2021 особь. Птицы уселись в ряд и оказалось, что между каждыми двумя птицами одного вида сидит чётное число птиц. Какое наименьшее число видов птиц могло быть?

Ответ. 1011.

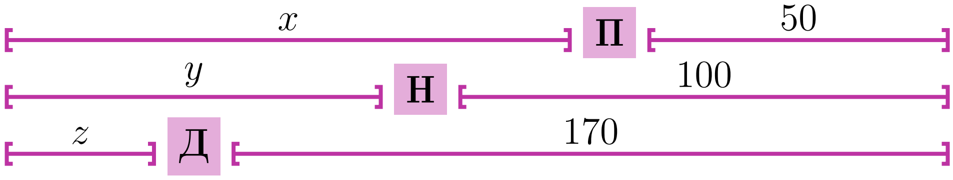
Решение. *Оценка.* Докажем, что не могло быть трёх и более птиц одного вида. В самом деле, пусть птицы одного вида A, B и C сидят именно в таком порядке. Пусть между A и B находится $2x$ птиц, между B и C — $2y$ птиц, тогда между A и C находится $2x+2y+1$ птица, то есть нечётное число птиц, что противоречит условию. Так как каждого вида не более чем по 2 птицы, то получается не менее 1011 видов.

Пример. Приведём пример, что 1011 видов могло быть. Например, птицы могут сидеть парами: две первого вида, две второго вида и т.д. до 1010 вида, и в конце ещё одна птица 1011 вида. Есть много других примеров.

7-7. Новобранцы стояли в ряд друг за другом, лицом в одну сторону. Среди них три брата: Пётр, Николай и Денис. Впереди Петра было 50 человек, впереди Николая — 100, впереди Дениса — 170. По команде «Кру-гом!» все развернулись в противоположную сторону. При этом оказалось, что перед одним из братьев сейчас стоит в четыре раза больше людей, чем перед другим. Сколько может быть новобранцев, включая братьев? Укажите все возможные варианты.

Ответ. 211.

Решение. Пусть сейчас перед Петром стоит x человек, перед Николаем — y человек, перед Денисом — z человек. Возможны три случая.



- $x = 4y$. Тогда $4y + 50 = y + 100$, откуда y — нецелое, что невозможно.
- $y = 4z$. Тогда $4z + 100 = z + 170$, откуда z — нецелое, что невозможно.
- $x = 4z$. Тогда $4z+50 = z+170$, откуда $z = 40$. Всего получается 211 новобранцев.

7-8. Бабушка и ее любимый внук Васютка договорились показать маме фокус. У бабушки было 10 начинок для пирожков, и она испекла по одному пирожку с каждыми двумя из этих начинок. Всего получилось 45 пирожков. Глядя на пирожок, только бабушка может определить его начинку.

Бабушка выкладывает n из 45 пирожков на поднос, Васютка разламывает их и смотрит, с какими они начинками. Затем он говорит маме: «У любого из оставшихся пирожков я точно могу определить хотя бы одну из его начинок, не разламывая!» И действительно, мама случайно берет любой из оставшихся пирожков, и Васютка верно определяет одну из его начинок.

При каком наименьшем n Васютка и бабушка могут показать маме такой фокус?

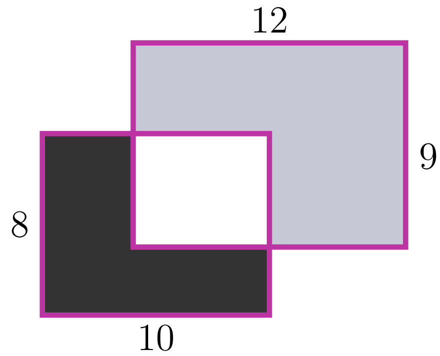
Ответ. 36.

Решение. Пусть Васютка разломал менее 36 пирожков, т.е. осталось ещё 10 или более пирожков. Допустим, что Васютка сказал маме про взятый ею пирожок, что в нём есть начинка первого типа. Почему он мог не угадать? Потому что среди 10-ти и более оставшихся пирожков есть пирожок без начинки первого типа (так как всего есть 9 пирожков, в которых есть начинка первого типа), а именно его и могла дать мама Васютке. Аналогично, Васютка не всегда угадает начинку, если скажет, что она второго, третьего,…, десятого типа. Значит, $n \geqslant 36$.

Мы сейчас доказали, что если $n < 36$, то Васютка не может точно назвать ни одну начинку в следующем пирожке. Но бывает ли ситуация при $n = 36$, когда Васютка всё же справится назвать начинку, которая точно будет в следующем пирожке? Оказывается, да! Для этого бабушка, заранее договорившись с Васюткой, выдаст ему все 36 пирожков без начинки первого типа. Тогда Васютка поймёт, что все оставшиеся пирожки содержат начинку первого типа, и назовёт маме эту начинку.

8 класс

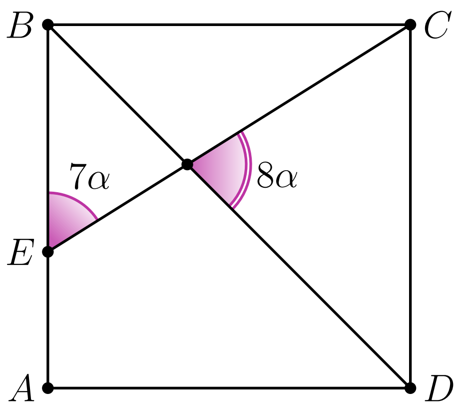
8-1. Два прямоугольника 8×10 и 12×9 наложены друг на друга так, как показано на рисунке. Площадь чёрной части равна 37. Чему равна площадь серой части? Если необходимо, округлите ответ до 0,01 или запишите ответ в виде обыкновенной дроби.



Ответ. 65.

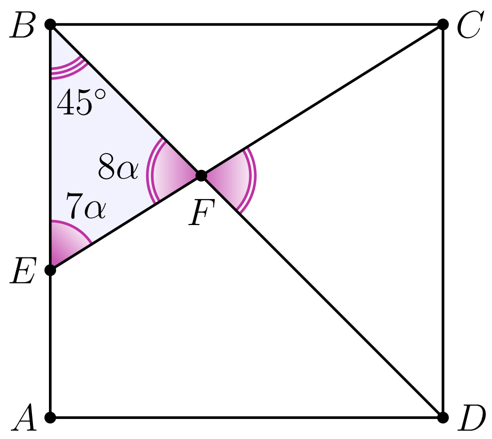
Решение. Площадь белой части равна $8 \cdot 10 - 37 = 43$, а значит площадь серой части равна $12 \cdot 9 - 43 = 65$.

8-2. В квадрате $ABCD$ проведен такой отрезок CE, что углы, показанные на чертеже, равны 7α и 8α. Найдите значение угла α в градусах. Если необходимо, округлите ответ до 0,01 или запишите ответ в виде обыкновенной дроби.



Ответ. $9°$.

Решение. В треугольнике DFE углы равны 7α, 8α и $45°$.



Так как сумма углов треугольника DFE равна $180°$, то $7\alpha + 8\alpha + 45° = 180°$, откуда $\alpha = \frac{1}{15} \cdot 135° = 9°$.

8-3. Что получится, если в выражении $(a+1)(a+3)(a+4)(a+5)(a+6)$ раскрыть скобки и привести подобные члены?
a) $a^5 + 360$.
b) $a^5 + 19a^4 + 137a^3 + 461a^2 + 702a + 360$.
c) $a^5 + 19a^4 + 138a^3 + 476a^2 + 776a + 480$.
d) $a^4 + 18a^3 + 119a^2 + 342a + 360$.
e) $a^5 + 18a^4 + 123a^3 + 402a^2 + 656a + 480$.

Ответ. b).

Решение. Откинем все варианты, кроме b):

- вариант a) неправильный поскольку помимо указанных двух слагаемых должны быть ещё какие-то;
- вариант d) неправильный, поскольку в нём получился многочлен 4-й степени;
- варианты c) и e) неправильные, поскольку в них неверный свободный член.

8-4. В финал конкурса красоты среди жирафов прошли два жирафа: Высокий и Пятнистый. 105 голосующих поделены на 5 округов, каждый округ поделён на 7 участков, а на каждом участке по 3 голосующих. Голосующие большинством выбирают победителя на своём участке; в округе побеждает жираф, победивший в большинстве участков округа; наконец, победителем финала объявляется жираф, победивший в большинстве округов. Победил жираф Высокий. Какое наименьшее число голосующих могли проголосовать за него?

Ответ. 24.

Решение. Чтобы Высокий победил в финале, он должен победить в 3-х округах. Чтобы победить в округе, Высокий должен победить в 4-х участках этого округа. Итого, нужно победить хотя бы в $3 \cdot 4 = 12$ участках. Чтобы победить на участке нужно, чтобы за тебя проголосовали хотя бы 2 голосующих. Итого, необходимо хотя бы 24 голосующих.

Комментарий. В задачах с вопросами «какое наибольшее» и «какое наименьшее» обычно решение состоит из двух частей: оценки и примера. *Оценка* — это доказательство, что большего (или меньшего, в зависимости от вопроса) ответа добиться нельзя, а *пример* — это доказательство, что указанного ответа добиться можно.

В решении выше мы не привели пример (т.е. не доказали), что 24 голосующих достаточно. Для полноты решению не хватает фразы «Из рассуждений выше понятно, что 24 голосующих за Высокого может быть достаточно: по 2 голосующих на 4 участках каких-то 3 округов».

8-5. В турнире принимают участие 6 команд P, Q, R, S, T и U, они должны сыграть каждая с каждой по одному разу. Каждый день они разбиваются на 3 пары и одновременно проходят матчи во всех трёх парах. Канал «Спортивный» выбрал, какой матч он будет транслировать в каждый из дней:

1 день	2 день	3 день	4 день	5 день
$P-Q$	$R-S$	$P-T$	$T-U$	$P-R$

В какой день могут играть друг с другом команды S и U? Отметьте все возможные варианты.

Ответ. Только в 1-й.

Решение. Посмотрим на команду P: в 1, 3 и 5 дни она сыграет с командами Q, T и R. Значит, в оставшиеся два дня она должна сыграть с командами S и U. Поскольку во 2-й день S играет с R, то P ничего не остаётся, кроме как во второй день играть с U, в 4-й — с S.

1 день	2 день	3 день	4 день	5 день
$P-Q$	$R-S$	$P-T$	$T-U$	$P-R$
	$P-U$		$P-S$	

Теперь можно восстановить оставшиеся игры во 2-й и 4-й дни:

1 день	2 день	3 день	4 день	5 день
$P-Q$	$R-S$	$P-T$	$T-U$	$P-R$
	$P-U$		$P-S$	
	$T-Q$		$Q-R$	

Аналогично, посмотрим на команду T. В 5-й день она должна играть или с R, или с S; R уже играет с P, а значит T будет играть с S. Тогда матч $T-R$ должен пройти в первый день:

1 день	2 день	3 день	4 день	5 день
$P-Q$	$R-S$	$P-T$	$T-U$	$P-R$
$T-R$	$P-U$		$P-S$	$T-S$
	$T-Q$		$Q-R$	

Получается, что в 1-й день оставшийся матч — матч $S-U$, который мы и искали.

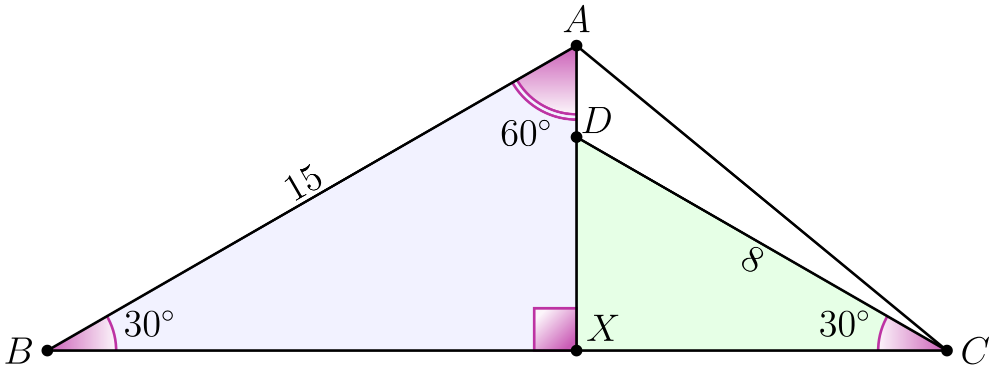
Комментарий. Описанная в условии ситуация действительно возможна:

1 день	2 день	3 день	4 день	5 день
$P-Q$	$R-S$	$P-T$	$T-U$	$P-R$
$T-R$	$P-U$	$Q-S$	$P-S$	$T-S$
$S-U$	$T-Q$	$R-U$	$Q-R$	$Q-U$

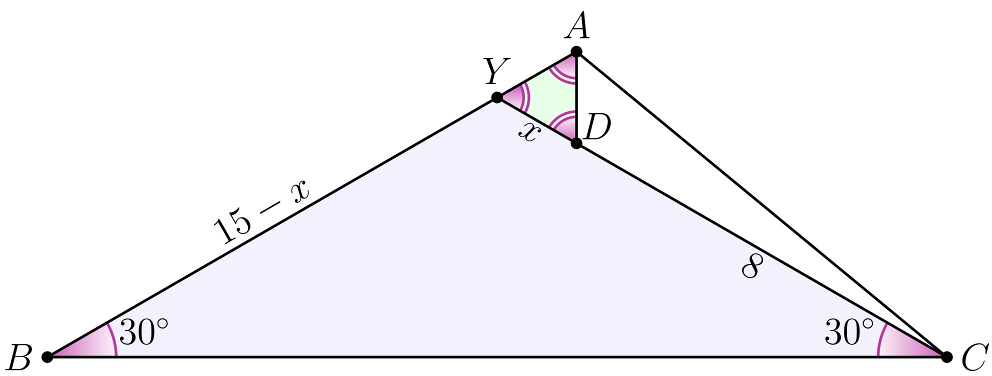
8-6. Внутри треугольника ABC выбрана точка D так, что $\angle BAD = 60°$ и $\angle ABC = \angle BCD = 30°$. Известно, что $AB = 15$ и $CD = 8$. Найдите длину отрезка AD. Если необходимо, округлите ответ до 0,01 или запишите ответ в виде обыкновенной дроби.

Ответ. 3,5.

Решение I. Пусть прямая AD пересекает отрезок BC в точке X. Поскольку в треугольнике ABX углы A и B равны $30°$ и $60°$, то угол X прямой. Значит, $AX = AB/2 = 7{,}5$, поскольку AX — катет прямоугольного треугольника ABX, лежащий напротив угла в 30 градусов. Аналогично, в прямоугольном треугольнике CDX имеем $DX = CD/2 = 4$. Таким образом, $AD = AX - DX = 3{,}5$.



Решение II. Пусть прямые CD и AB пересекаются в точке Y. Угол AYD внешний для треугольника BYC, поэтому $\angle AYD = \angle CBY + \angle BCY = 30° + 30° = 60°$. Таким образом, в треугольнике AYD углы при вершинах A и Y равны по 60 градусов, поэтому этот треугольник равносторонний. Пусть $AD = AY = DY = x$. Заметим, что треугольник BCY равнобедренный, поскольку его углы при вершинах B и C равны. Значит, $15 - x = BY = CY = 8 + x$, откуда $2x = 7$ и $x = 3{,}5$.



8-7. Петя задумал четыре различные цифры, не равные 0. Затем он всеми способами составил из этих цифр четырёхзначные числа без повторяющихся цифр. Сумма всех этих чисел оказалась равна 73326. Какие 4 цифры задумал Петя?

Ответ. 1, 2, 3, 5.

Решение. Пусть Петя задумал цифры a, b, c и d. Всего будет 24 числа, составленных из этих цифр. Если сложить все эти числа, то каждая из цифр a, b, c и d будет встречаться в каждом разряде 6 раз. Поэтому сумма всех 24-х чисел будет равна $6 \cdot (a+b+c+d) \cdot 1111 = 73326$. Отсюда $a+b+c+d = 11$. Число 11 можно представить в виде суммы четырёх различных цифр только одним способом: $11 = 1+2+3+5$. Именно эти цифры и задумал Петя.

8-8. Турнир по шахматам проходит по следующей системе: каждый из 15 учеников школы «Белая ладья» должен сыграть один раз с каждым из 20 учеников школы «Чёрный слон», т.е. всего должно быть проведено 300 партий. В каждый момент времени проводится не более одной партии.

После n партий болельщик Саша, который смотрел все партии и знает всех участников, воскликнул: «Я точно могу назвать одного из участников следующей партии!» При каком наименьшем n такое могло случиться?

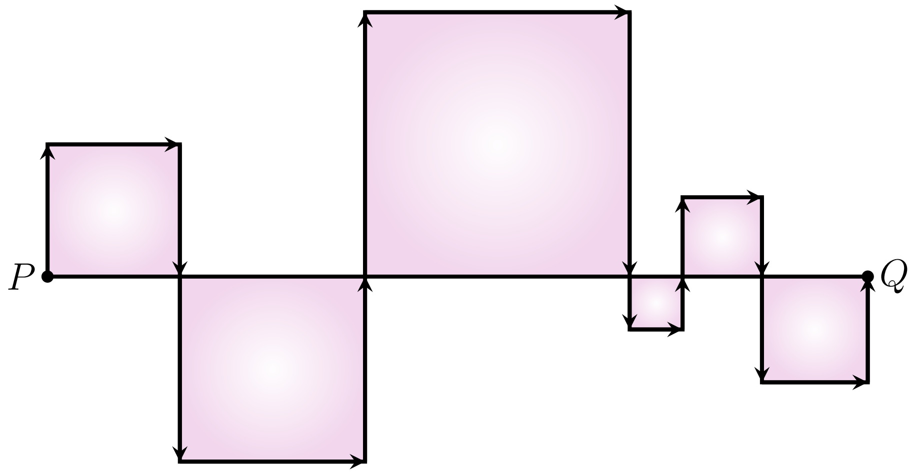
Ответ. 280.

Решение. *Оценка.* Пусть прошло меньше 280 партий, т.е. осталось ещё больше 20 партий. Тогда среди участников школы «Белая ладья» есть как минимум два ученика, которые сыграли ещё не все свои партии. Тогда Саша не может точно назвать участника следующей партии от школы «Белая ладья». Аналогично, Саша не может назвать и участника следующей партии от школы «Чёрный слон». Значит, n хотя бы 280.

Пример. Мы сейчас доказали, что если $n < 280$, то Саша не может назвать ни одного из участников следующей партии. Но бывает ли ситуация при $n = 280$, когда Саша всё же справится назвать кого-то, кто будет играть в следующей партии? Оказывается, да! Для этого 14 учеников школы «Белая ладья» должны сыграть все свои партии, это как раз 280 партий. Тогда в следующей партии точно примет участие оставшийся ученик школы «Белая ладья» — его Саша и назовёт.

9 класс

9-1. Отрезок PQ поделён на несколько более маленьких отрезков. На каждом из них построен квадрат (см. рис.).

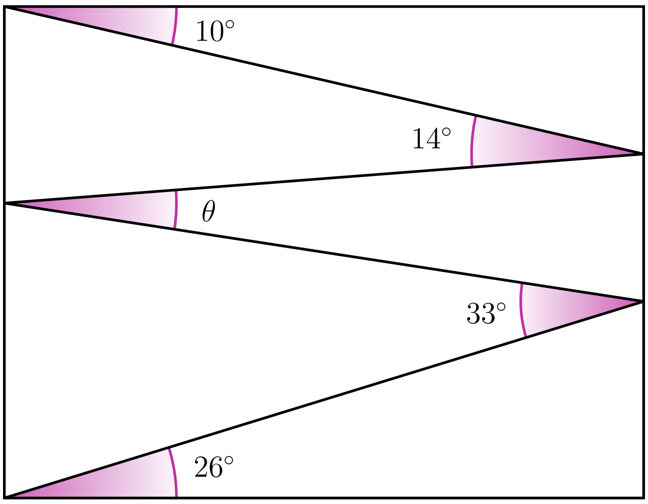


Чему равняется длина пути по стрелочкам, если длина отрезка PQ равняется 73? Если необходимо, округлите ответ до 0,01 или запишите ответ в виде обыкновенной дроби.

Ответ. 219.

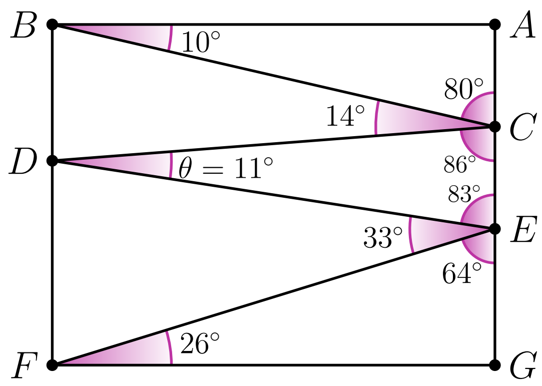
Решение. Заметим, что в каждом квадрате вместо того, чтобы пройти по одной стороне, мы идём по трём сторонам. Поэтому длина пути по стрелочкам в 3 раза больше длины пути по отрезку, откуда ответ $73 \cdot 3 = 219$.

9-2. Валера нарисовал зигзаг внутри прямоугольника. Часть углов отмечены на чертеже. Чему равняется угол θ? Ответ дайте в градусах. Если необходимо, округлите ответ до 0,01 или запишите ответ в виде обыкновенной дроби.



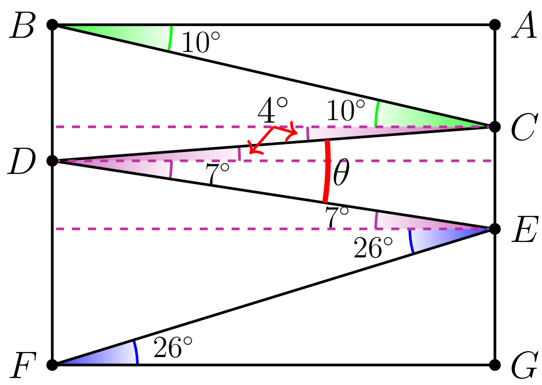
Ответ. 11°.

Решение I. Пусть наш зигзаг и две стороны прямоугольника — это ломаная $ABCDEFG$.



Тогда, пользуясь тем, что сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$, находим $\angle ACB = 90° - 10° = 80°$, $\angle FEG = 90° - 26° = 64°$. Теперь, пользуясь тем, что развёрнутый угол равен $180°$, находим $\angle DCE = 180° - 80° - 14° = 86°$, $\angle DEC = 180° - 64° - 33° = 83°$. Наконец, пользуясь тем, что сумма углов треугольника равна $180°$, находим $\angle CDE = 180° - 86° - 83° = 11°$.

Решение II. Проведём через вершины зигзага недостающие прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Поскольку при пересечении параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны, то угол в $14°$ разобьётся на углы $10°$ и $14° - 10° = 4°$, а угол в $33°$ — на углы $26°$ и $33° - 26° = 7°$.



Угол θ складывается из углов $4°$ и $7°$, поэтому $\theta = 4° + 7° = 11°$.

9-3. Арина выписала в ряд без пробелов все числа от 71 до 81, получив большое число $717273\ldots81$. София стала дописывать к нему следующие числа (т.е. вначале она дописала 82, потом 83, ...). В тот момент, когда большое число стало кратно 12, София остановилась. Последним она дописала число N. Чему равно N?

Ответ. 88.

Решение. Число делится на 12 тогда и только тогда, когда оно делится на 3 и на 4. Чтобы число делилось на 4, число, образованное его последними двумя цифрами, тоже должно делится на 4. Значит, последнее число, которое напишет София, должно делится на 4.

Ближайшее число, которое делится на 4, — 84, но число $71727374\ldots84$ имеет сумму цифр 158, т.е. не делится на 3. Следующее число, которое делится на 4, — 88. Сумма цифр числа $71727374\ldots88$ равна 216, т.е. всё число делится на 3.

9-4. Числа a и b таковы, что $a+b>0$. Какие из следующих неравенств обязательно верны?
a) $a^5b^2+a^4b^3 \geqslant 0$;
b) $a^4b^3+a^3b^4 \geqslant 0$;
c) $a^{21}+b^{21}>0$;
d) $(a+2)(b+2)>ab$;
e) $(a-3)(b-3)<ab$;
f) $(a+2)(b+3)>ab+5$.

Ответ. a), c), d).

Решение. a) $a^5b^2+a^4b^3 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^4b^2(a+b) \geqslant 0$, что верно.
b) $a^4b^3+a^3b^4 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^3b^3(a+b) \geqslant 0$, что неверно, например, при $a=-1$, $b=2$.
c) Заметим, что если $x>y$, то $x^{21}>y^{21}$ вне зависимости от знаков x и y, поэтому из $a>-b$ следует, что $a^{21}>-b^{21}$, т.е. $a^{21}+b^{21}>0$.
d) $(a+2)(b+2)>ab \Leftrightarrow 2(a+b)+4>0$, что верно.
e) $(a-3)(b-3)<ab \Leftrightarrow 9<3(a+b)$, что неверно, например, при $a=b=1$.
f) $(a+2)(b+3)>ab+5 \Leftrightarrow 3a+2b+1>0$, что неверно, например, при $a=-4$, $b=5$.

9-5. Окружность поделена 100 точками на 100 равных дуг. Рядом с точками написали числа от 1 до 100, каждое по одному разу. Оказалось, что для любого числа k, если провести через точку с числом k диаметр, то по разные стороны от этого диаметра чисел, меньших k, будет поровну. Какое число может быть написано в точке, диаметрально противоположной точке с числом 83?

Ответ. Только 84.

Решение. Посмотрим на нечётное число $2m+1$. Мысленно отбросим его и число, диаметрально ему противоположное. По условию, среди оставшихся чисел, все числа, меньшие $2m+1$, делятся на две одинаковые по численности группы. Значит, среди оставшихся чисел чётное количество чисел, меньших $2m+1$. Всего чисел, меньших $2m+1$ тоже чётное количество — их $2m$. Из этого следует, что число, диаметрально противоположное $2m+1$ должно быть его больше!

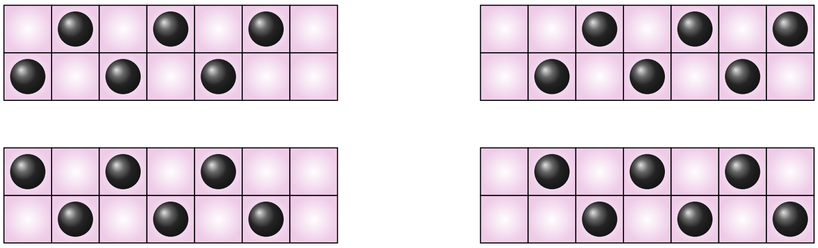
Тогда напротив 99 может стоять только 100, напротив 97 — только 98 (ведь числа 99 и 100 уже стоят друг напротив друга), напротив 95 — только 96 (ведь все большие числа уже поставлены друг напротив друга), и т.д. Значит, напротив 83 стоит 84.

Комментарий. Отметим, что любой вариант, где для всех $m=1,2,\ldots,50$ числа $2m-1$ и $2m$ стоят в диаметрально противоположных точках, подходит.

9-6. Петя хочет положить 99 монет в клетки доски 2×100 так, чтобы не было двух монет в клетках с общей стороной, и в каждой клетке лежало не более одной монеты. Сколько существует способов так положить монеты?

Ответ. 396.

Решение. Заметим, что будет ровно 1 пустой столбец. Тогда слева от него ровно два способа раскладки, и справа от него тоже ровно два способа раскладки.



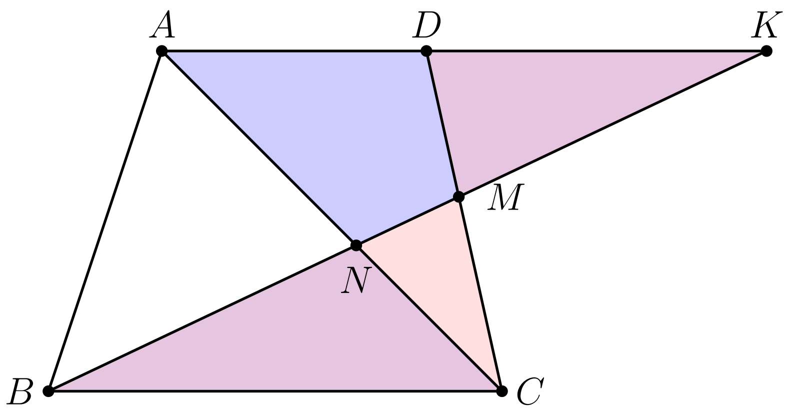
Всего получается $2 \cdot 2 = 4$ способа раскладки при фиксированном пустом столбце — каждый способ на картинке слева надо скомбинировать с каждым способом на картинке справа.

Но это рассуждение не работает в тех случаях, когда пустой столбец самый правый или самый левый — тогда получается не 4, а только 2 способа раскладки. Итого, всего будет $98 \cdot 4 + 2 + 2 = 396$ способов.

9-7. Дана трапеция $ABCD$. На её боковой стороне CD выбрана точка M так, что $CM/MD = 4/3$. Оказалось, что отрезок BM делит диагональ AC на два отрезка, отношение длин которых также равно $4/3$. Какие значения может принимать отношение AD/BC? Если необходимо, округлите ответ до 0,01 или запишите ответ в виде обыкновенной дроби.

Ответ. $7/12 \approx 0{,}58$.

Решение. Пусть отрезок BM пересекается с отрезком AC в точке N. Если $CN/NA = 4/3$, то $CN/NA = 4/3 = CM/MD$, откуда по теореме, обратной теореме Фалеса (или из подобия треугольников CND и CAD), прямые MN и AD параллельны; но это невозможно, ведь тогда прямые BC и MN тоже параллельны, но они пересекаются в точке B. Значит, $NA/NC = 4/3$.



Продлим отрезок BM до пересечения с прямой AD в точке K. Треугольники BCN и KAN подобны по двум углам, откуда $KA/BC = NA/NC = 4/3$. Треугольники BCM и KDM также подобны по двум углам, откуда $KD/BC = MD/MC = 3/4$. Осталось заметить, что

$$\frac{AD}{BC} = \frac{KA - KD}{BC} = \frac{KA}{BC} - \frac{KD}{BC} = \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12} \approx 0{,}58.$$

9-8. Все цифры в записи 6-значных натуральных чисел a и b – чётные, а в записи любого числа между ними есть нечётная цифра. Найдите наибольшее возможное значение разности $b - a$.

Ответ. 111 112.

Решение. *Оценка.* Докажем, что к 9-значному числу a, меньшему 888 888, все цифры которого чётны, можно добавить число, не большее 111 112 так, что вновь все его цифры будут чётные. Если среди цифр числа a, кроме первой, есть цифра, меньшая 8, то можно увеличить её на 2. В противном случае число имеет вид $A88\,888$. Так как $A < 8$, то к нему можно добавить 111 112 и получится $(A + 2)00\,000$. Если же $a = 888\,888$, то все большие 6-значные числа содержат в себе нечётную цифру, поэтому среди них не может найтись подходящее число b.

Пример. Осталось проверить, что разность 111 112 бывает. Рассуждения из оценки подсказывают, что примером могут быть числа $a = 288\,888$ и $b = 400\,000$. И правда: у любого числа между ними есть или цифра 3, или цифра 9.

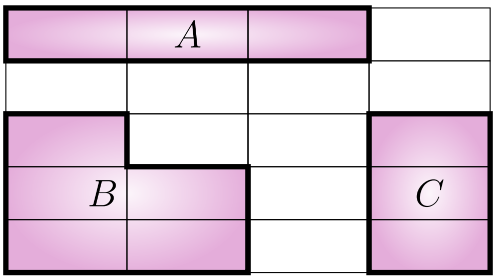
10 класс

10-1. На столе стоят несколько мисок, в каждой из которых лежат несколько виноградин. В разных мисках может лежать различное количество виноградин. Если в 12 мисок добавить еще по 8 ягод винограда, то среднее количество ягод во всех мисках увеличится на 6. Сколько мисок на столе?

Ответ. 16.

Решение. Обозначим количество мисок за n. Общее количество ягод увеличилось на $12 \cdot 8 = 96$. Так как среднее количество ягод увеличилось на 6, то их общее количество должно было увеличиться на $6n$. Следовательно, $6n = 96$, откуда $n = 16$.

10-2. Большой прямоугольник на рисунке состоит из 20 одинаковых маленьких. Периметр фигуры A равен 56 см, периметр фигуры B равен 56 см. Чему равен периметр фигуры C? Ответ дайте в см.



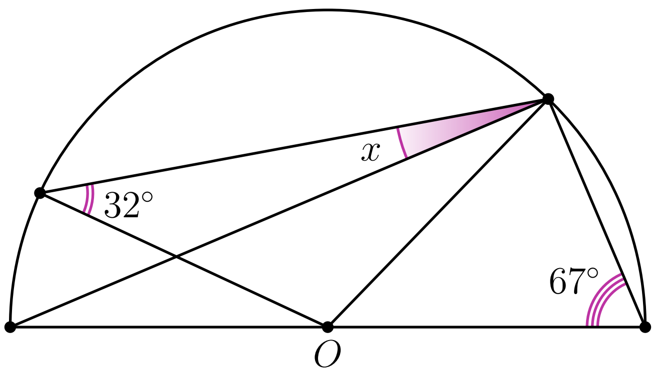
Ответ. 40.

Решение. Пусть горизонтальный размер прямоугольничка равен x, а вертикальный размер равен y. Из условия получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 6x + 2y = 56, \\ 4x + 6y = 56. \end{cases}$$

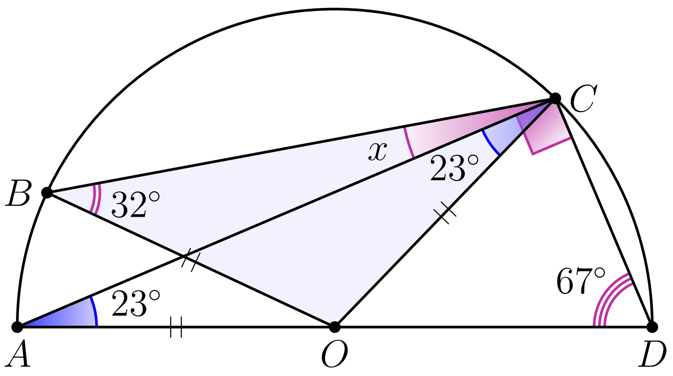
Нужно найти, чему равно $2x + 6y$. Решая систему, находим $x = 8$, $y = 4$, откуда $2x + 6y = 40$.

10-3. Точка O — центр окружности. Чему равно значение угла x в градусах?



Ответ. 9.

Решение. Так как $OB = OC$, то $\angle BCO = 32^\circ$. Значит, для нахождения угла x достаточно найти угол ACO: $x = 32^\circ - \angle ACO$.



Так как $OA = OC$, то $\angle ACO = \angle OAC = 90^\circ - 67^\circ = 23^\circ$ (здесь мы воспользовались тем, что треугольник ACD прямоугольный: угол ACD, опирающийся на диаметр, прямой).

Итак, $x = 32^\circ - 23^\circ = 9^\circ$.

10-4. Вначале на экране калькулятора горело натуральное число. Каждый раз Оля добавляла к текущему числу n на экране калькулятора натуральное число, на которое n не делилось. Например, если на экране было число 10, Оля могла добавить 7 и получить 17.

Оля повторила такую операцию пять раз, и на экране оказалось число 200. При каком наибольшем начальном числе такое могло случиться?

Ответ. 189.

Решение. *Оценка.* Заметим, что Оля каждый раз увеличивала число на экране не меньше чем на 2, потому что любое число делится на 1. Если Оля пять раз добавила двойку, то начальное число было равно 190, и двойку к нему добавлять было нельзя. Значит, Оля хотя бы раз добавила число, большее двух. Следовательно, суммарно она увеличила число хотя бы на 11, откуда $n \leqslant 189$.

Оценка. При $n = 189$ такое возможно: $200 = 189 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3$.

10-5. Для каждого натурального числа от 1 до 999 Дамир отнял от первой цифры последнюю и записал все полученные 1000 разностей на доску. Например, для числа 7 Дамир записал на доску число 0, для числа 105 записал (-4), для числа 61 записал 5.

Чему равна сумма всех чисел на доске?

Ответ. 495.

Решение. Заметим, для однозначных чисел на доску записываются нули, которые не влияют на сумму. Для чисел, у которых первая и последняя цифра совпадают, на доску тоже записываются нули, не влияющие на сумму.

Почти все остальные числа разбиваются на пары: число и число, полученное перестановкой первой и последней цифры. Например, 17 и 71, 122 и 221, 103 и 301. Если для одного числа пары на доску записывается число x, то для другого числа пары записывается $-x$, в результате чего x и $-x$ дают вместе нулевой вклад в сумму всех чисел на доске.

Осталось разобраться с числами, у которых нет пары. Это числа, оканчивающиеся на 0! Для них надо всё посчитать напрямую. Числа вида $a0$ (где $a = 1, 2, \ldots 9$) дадут вклад a в считаемую сумму, таких чисел одно для каждого a. Числа вида $a * 0$ тоже дадут вклад a в считаемую сумму, таких чисел 10. Итого, получается 11 слагаемых, равных a, в считаемой сумме.

Следовательно, считаемая сумма равна

$$1 \cdot 11 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 11 + \ldots + 9 \cdot 11 = 45 \cdot 11 = 495.$$

10-6. Места велосипедистов в гонке определяются по сумме времени на всех этапах: первое место у гонщика с наименьшим суммарным временем,..., последнее место у гонщика с наибольшим суммарным временем. Было 500 велосипедистов, гонка проходила в 15 этапов, гонщиков с одинаковыми временами как на этапах, так и по сумме на всех этапах, не было. Вася каждый раз приезжал седьмым. Какое самое низкое место (то есть место с наибольшим номером) он мог занять?

Ответ. 91.

Решение. *Оценка.* Заметим, что если гонщик A имеет более высокое место, чем гонщик B, то хотя бы в одной гонке A обогнал B. Васю в 15 гонках обогнало не более $6 \cdot 15 = 90$ других гонщиков (не более — потому что кто-то мог обогнать Васю в нескольких гонках). Поэтому выше Васи может быть не более 90 гонщиков, то есть Вася не мог занять место ниже 91.

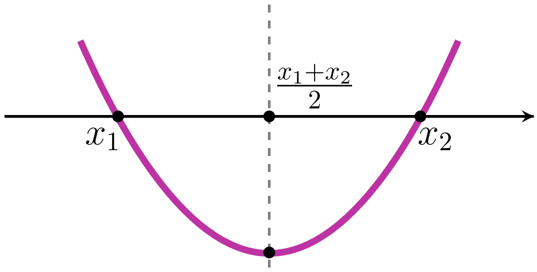
Пример. Покажем, что Вася действительно мог занять 91-е место. Пусть в каждой из 15 гонок 7 гонщиков, обогнавших Васю, каждый раз были разными. Они финишировали примерно за 5 часов, Вася — ровно за 10 часов, остальные — за примерно 10.1 часов.

Тогда суммарное время каждого из 90 гонщиков, обгонявших Васю, примерно $5 + 14 \cdot 10.1 = 146.4$ часа, суммарное время Васи $15 \cdot 10 = 150$ часов, суммарное время каждого из остальных гонщиков — $15 \cdot 10.1 = 151.5$ часов. У Васи 91 место. Осталось подобрать точные времена (вместо «за примерно 5 часов», «за примерно 10.1 часов») так, чтобы не было гонщиков с одинаковыми местами. Ясно, что это можно сделать, если у кому-то в каких-то гонках добавить по долям секунды: все времена, которые должны быть разными, сделаем разными, но при этом Вася останется на 91 месте.

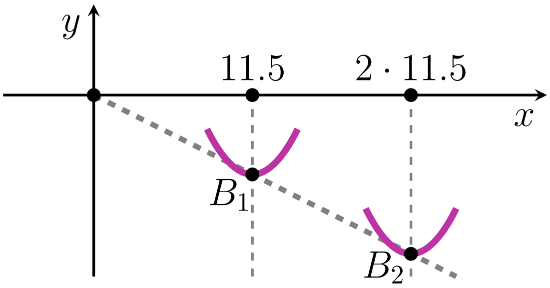
10-7. Парабола Π_1 с ветвями, направленными вверх, проходит через точки с координатами $(10, 0)$ и $(13, 0)$. Парабола Π_2 с ветвями, направленными вверх, тоже проходит через точку с координатами $(13, 0)$. Также известно, что вершина параболы Π_1 делит пополам отрезок, соединяющий начало координат и вершину параболы Π_2. В точке с какой абсциссой парабола Π_2 ещё раз пересекает ось Ox?

Ответ. 33.

Решение. Дважды воспользуемся таким фактом: если x_1 и x_2 абсциссы точек пересечения параболы с осью $0x$, то абсцисса вершины равна $\frac{x_1+x_2}{2}$ (абсцисса вершины — середина отрезка с концами x_1 и x_2).



Применяя этот факт, получаем, что x-координата вершины параболы Π_1 равна $\frac{10+13}{2} = 11.5$, а тогда x-координата вершины параболы Π_2 равна $2 \cdot 11.5$.



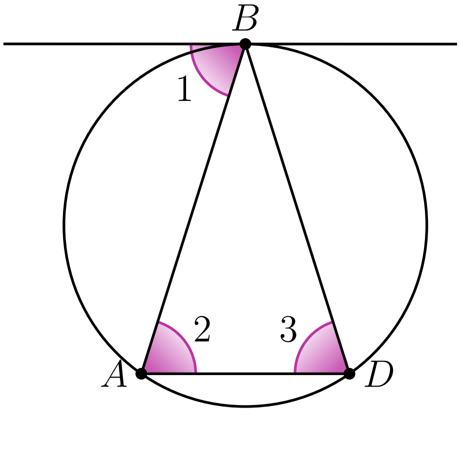
Если обозначить через t искомую абсциссу второй точки пересечения параболы Π_2 с осью $0x$, то, снова применяя факт, получаем $\frac{13+t}{2} = 2 \cdot 11.5$, откуда $t = 33$.

Комментарий. Условие, что ветви парабол направлены вверх, в решении не использовалось.

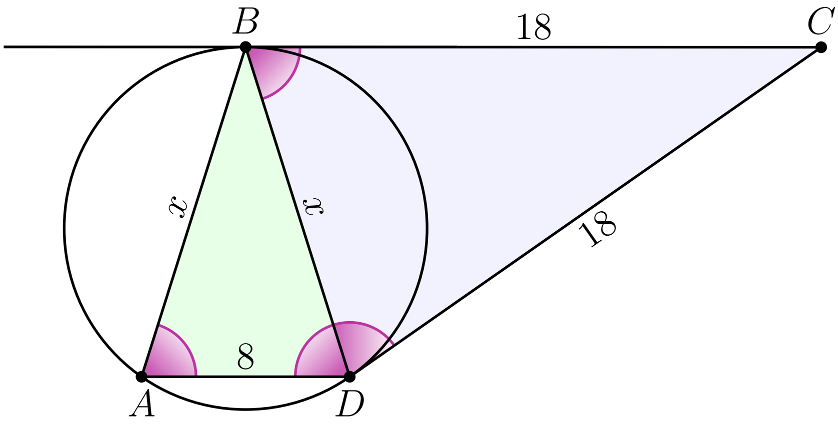
10-8. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны 8 и 18 соответственно. Известно, что описанная окружность треугольника ABD касается прямых BC и CD. Найдите периметр трапеции.

Ответ. 56.

Решение. Сделаем следующее замечание. Через точку B на окружности проходит прямая, параллельная хорде AD. Ясно, что тогда B — середина дуги AD, то есть $BA = BD$ (в самом деле, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие, $\angle 1 = \angle 3$ по теореме об угле между касательной и хордой, следовательно, $\angle 2 = \angle 3$).



Далее, из точки C проведены две касательные к окружности; значит, они равны: $CD = CB = 18$.



Осталось найти длину стороны AB, которую обозначим за x. Для этого заметим, что $\angle CBD = \angle BDA$ как накрест лежащие. Значит, равнобедренные треугольники CBD и BDA подобны как равнобедренные треугольники с равными углами при основаниях. Из подобия получаем $\frac{x}{8} = \frac{18}{x}$, откуда $x = 12$. Итого, периметр трапеции равен $12 + 18 + 18 + 8 = 56$.

11 класс

11-1. Близнецы Паоло и Севилья празднуют свой день рождения в кафе с друзьями. Если итоговую сумму счёта разделить поровну на всех, то каждый должен будет заплатить по 12 евро. А если разделить её поровну на всех, кроме Паоло и Севильи, то каждый должен будет заплатить по 16 евро. Сколько друзей пришло к Паоло и Севилье на день рождения?

Ответ. 6.

Решение. Пусть пришло n друзей. Тогда получаем уравнение $12(n+2) = 16n$, откуда $n = 6$.

11-2. За круглым столом сидело 14 участников конференции. Во время перерыва некоторые из них (но не все) ушли пить кофе. Оказалось, что у каждого участника, оставшегося за столом, ушел ровно один сосед. Сколько участников могли отправиться за кофе? Приведите все возможные варианты ответа.

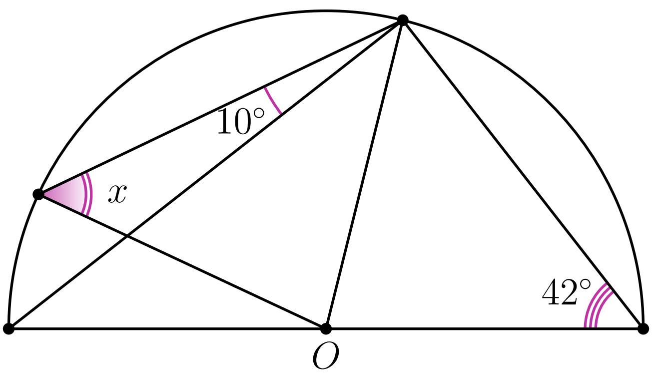
Ответ. 6, 8, 10 или 12 участников.

Решение. Пусть участник А остался за столом. Тогда из его соседей остался ровно один, пусть Б. Но из соседей Б остался тоже ровно один участник, и это участник А. Значит, все оставшиеся за столом участники разбиваются на пары.

Итак, оставшиеся участники сидят рядом парами, и между парами сколько угодно участников (но не менее, чем 1) ушли пить кофе. Значит, остались 2, 4, 8, 10 и т.д. участников. Но 10 и более остаться не могли: между пятью и более парами будет хотя бы 5 ушедших пить кофе, и всего получится не менее 15 человек за столом, а по условию их 14.

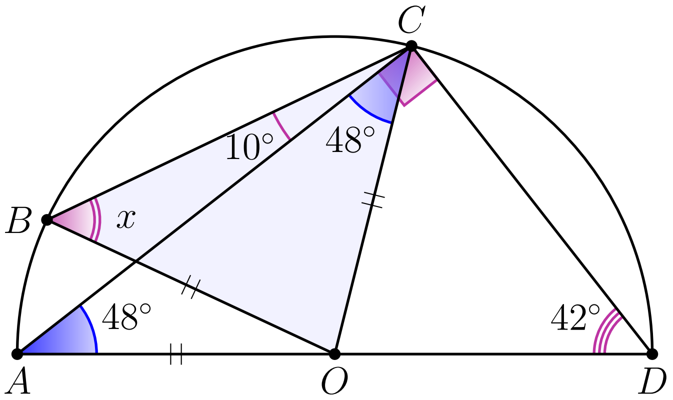
Раз остались 2, 4, 6 или 8 участников, то ушли 6, 8, 10 или 12 участников.

11-3. Точка O — центр окружности. Чему равно значение угла x в градусах?



Ответ. 58.

Решение. Угол ACD прямой, поскольку он опирается на диаметр окружности.



Значит, $\angle CAD = 90^\circ - \angle CDA = 48^\circ$. Также $AO = BO = CO$ как радиусы окружностей, откуда $\angle OCA = \angle ACO = 48^\circ$ и $x = \angle OBC = \angle OCB = 48^\circ + 10^\circ = 58^\circ$.

11-4. Вначале на экране калькулятора горело натуральное число. Каждый раз Таня добавляла к текущему числу n на экране калькулятора натуральное число, на которое n не делилось. Например, если на экране было число 10, Таня могла добавить 7 и получить 17.

Таня повторила такую операцию пять раз, и на экране оказалось число 100. При каком наибольшем начальном числе такое могло случиться?

Ответ. 89.

Решение. *Оценка.* Заметим, что Таня каждый раз увеличивала число на экране не меньше чем на 2, потому что любое число делится на 1. Если Таня пять раз добавила двойку, то начальное число было равно 90, и двойку к нему добавлять было нельзя. Значит, Таня хотя бы раз добавила число, большее двух. Следовательно, суммарно она увеличила число хотя бы на 11, откуда $n \leqslant 89$.

Оценка. При $n = 89$ такое возможно: $100 = 89 + 2 + 2 + 2 + 2 + 3$.

11-5. Функция $f(x)$ определена при всех положительных значениях x. Оказалось, что $f\left(\frac{4y+1}{y+1}\right) = \frac{1}{y}$ при любом $y > 0$. Найдите $f(3)$.

Ответ. 0.5.

Решение. Надо подставить вместо y такое число, чтобы было $\frac{4y+1}{y+1} = 3$, то есть $y = 2$. Получаем $f(3) = \frac{1}{2}$.

Комментарий. Заметим, что такая функция существует. Доказательство этого практически совпадает с решением задачи: $\frac{4y+1}{y+1} = a$, $y = \frac{a-1}{4-a}$, откуда при $a \neq 4$ получаем $f(a) = \frac{4-a}{a-1}$. Возникает вопрос — а чему равны $f(1)$ и $f(4)$? Оказывается, они могут равняться любым числам! Ведь условие $f(\frac{4y+1}{y+1}) = \frac{1}{y}$ ничего не говорит ни про значение $f(1)$, ни про значение $f(4)$: выражение $\frac{4y+1}{y+1}$ никогда не равно 4, а $\frac{4y+1}{y+1} = 1$ при $y = 0$, которое нам нельзя подставлять по условию.

11-6. Петя всеми способами расставляет знаки + и − в выражении $1*2*3*4*5*6$ на места звёздочек. Для каждой расстановки знаков он считает получившийся результат и пишет его на доску. Над доске некоторые числа могут встречаться несколько раз. Все числа на доске Петя складывает. Чему равна полученная Петей сумма?

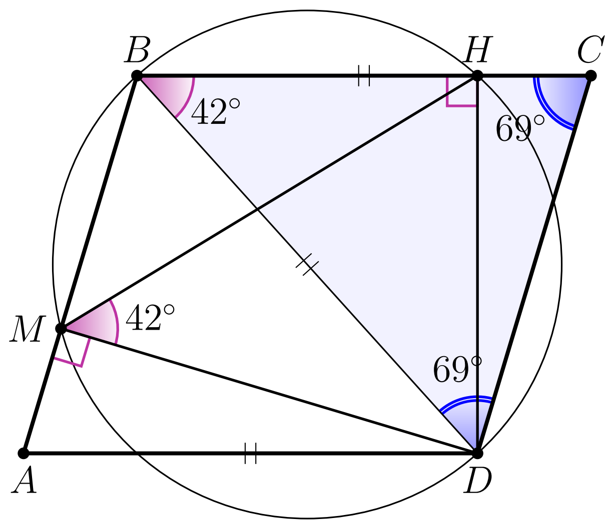
Ответ. 32.

Решение. Заметим, что каждая из цифр $2, 3, 4, 5, 6$ даст нулевой вклад в Петину сумму: она поровну раз будет входить со знаком $+$ и со знаком $-$. А цифра 1 будет входить во все суммы со знаком $+$ столько раз, сколько всего будет слагаемых. Так как каождая из звёздочек может принимать два значения, то будет $2^5 = 32$ слагаемых. Итак, Петина сумма равна 32.

11-7. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle B = 111°$ и $BC = BD$. На отрезке BC отмечена такая точка H, что $\angle BHD = 90°$. Точка M — середина стороны AB. Найдите угол AMH. Ответ дайте в градусах.

Ответ. $132°$.

Решение. Отметим, что $\angle DMB = 90°$, так как $DA = DB$, а в равнобедренном треугольнике BDA медиана DM является высотой. Так как углы DHB и DMB прямые, то точки M, B, H и D лежат на одной окружности. Ясно, что достаточно найти угол DMH, так как $\angle AMH = \angle DMH + 90°$.



Углы DMH и DBH равны, так как эти углы опираются на одну дугу DH в окружности. Значит, надо найти угол DBH. Но его легко можно найти из равнобедренного треугольника DBC, если знать угол C при основании этого треугольника: $\angle DBC = 180° - 2\angle C$. Но угол C равен $180° - 111° = 69°$. Тем самым $\angle DBC = 42°$, и $\angle AMH = \angle DMH + 90° = 42° + 90° = 132°$.

11-8. В караване 100 верблюдов, одногорбых и двугорбых, и тех, и других хотя бы по одному. Если взять любых 62 верблюда, то у них будет не менее половины общего числа горбов в караване. Пусть N — количество двугорбых верблюдов. Сколько значений (в диапазоне от 1 до 99) может принимать N?

Ответ. 72.

Решение. Если всего было N двугорбых верблюдов, то было $100-N$ одногорбых, а всего было $100+N$ горбов. Выстроим верблюдов в ряд: сначала одногорбых, а потом двугорбых. Ясно, что если условие про 62 верблюда выполнено для первых 62 верблюдов, то оно выполнено и про любые 62 верблюда. Возможны два случая: первые 62 верблюда все одногорбые, или среди них есть хотя бы один двугорбый.

1) Пусть первые 62 верблюдов одногорбые. Тогда по условию $62 \geqslant \frac{1}{2}(100+N)$, откуда $N \leqslant 24$.

2) Среди первых 62 верблюдов есть двугорбые, пусть их количество равно y. Тогда по условию $62+y \geqslant \frac{1}{2}(100+38+y)$, откуда $y \geqslant 14$. Тогда $N \geqslant 14+38=52$.

Итак, количество двугорбых верблюдов лежит в диапазонах от 1 до 24 включительно или от 52 до 99 включительно. Получается $24+48=72$ варианта.