

Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 5 класса, 2021-2022 учебный год.

1.1. Если к числу прибавить его последнюю цифру, то получится 5574, а если предпоследнюю, то 5573. Что это за число?

Ответ: 5567

Решение. Заметим, что загаданное число отличается от 5574 на цифру, поэтому загаданное число не меньше $5574 - 9 = 5565$ и не больше 5574. Тогда предпоследняя цифра числа это 6 или 7, следовательно наше число это 5566 или 5567. Первое из них не подходит, а второе подходит.

1.2. Если к числу прибавить его последнюю цифру, то получится 4366, а если предпоследнюю, то 4363. Что это за число?

Ответ: 4358

1.3. Если к числу прибавить его последнюю цифру, то получится 3886, а если предпоследнюю, то 3885. Что это за число?

Ответ: 3878

1.4. Если к числу прибавить его последнюю цифру, то получится 1992, а если предпоследнюю, то 1994. Что это за число?

Ответ: 1986

1.5. Если к числу прибавить его последнюю цифру, то получится 6094, а если предпоследнюю, то 6095. Что это за число?

Ответ: 6087

2.1. В таблице стоят числа. Оказалось, что шесть сумм: три суммы по строкам и три суммы по столбцам — одинаковые. Минимальное из чисел a , b и c равно 101. Найдите сумму $a + b + c$.

a	1	4
2	b	5
3	6	c

Ответ: 309

Решение. Заметим, что $a + 5 = b + 7 = c + 9$, следовательно, число c самое маленькое, а другие больше на 2 и на 4, то есть 103 и 105. Сумма всех трёх чисел $101 + 103 + 105 = 309$

2.2. В таблице стоят числа. Оказалось, что шесть сумм: три суммы по строкам и три суммы по столбцам — одинаковые. Минимальное из чисел a , b и c равно 203. Найдите сумму $a + b + c$.

5	2	a
6	b	3
c	7	4

Ответ: 615

2.3. В таблице стоят числа. Оказалось, что шесть сумм: три суммы по строкам и три суммы по столбцам — одинаковые. Минимальное из чисел x , y и z равно 105. Найдите сумму $x + y + z$.

x	1	6
2	y	8
5	9	z

Ответ: 326

2.4. В таблице стоят числа. Оказалось, что шесть сумм: три суммы по строкам и три суммы по столбцам — одинаковые. Минимальное из чисел x , y и z равно 204. Найдите сумму $x + y + z$.

4	2	x
7	y	1
z	6	5

Ответ: 620

2.5. В таблице стоят числа. Оказалось, что шесть сумм: три суммы по строкам и три суммы по столбцам — одинаковые. Максимальное из чисел a , b и c равно 306. Найдите сумму $a + b + c$.

a	2	6
3	b	7
5	8	c

Ответ: 911

3.1. Алина и Маша хотели составить интересный вариант школьного тура олимпиады. Маша предложила несколько задач и отвергла каждую вторую задачу Алины (ровно половину), Алина тоже предложила несколько задач и не отвергла только каждую третью задачу Маши (ровно треть). В итоге получилось 10 задач, а изначально предложено было 27. На сколько задач Маша предложила больше, чем Алина?

Ответ: 15

Решение. Всего было отвергнуто 17 задач. Заметим, что из задач, предложенных Алиной, поровну вошедших и отвергнутых, а из задач, предложенных Машей, отвергнутых в два раза больше, чем оставшихся в варианте. Так как отвергнуто на 7 больше чем вошло, то именно 7 задач Маши вошло в вариант, то есть предложила она 21. Так как 3 задачи Алины в варианте, то предложено было 6. Разница числа предложенных задач $21 - 6 = 15$.

3.2. Надя и Таня хотели составить интересный вариант школьного тура олимпиады. Надя предложила несколько задач и отвергла каждую вторую задачу Тани (ровно половину), Таня тоже предложила несколько задач и не отвергла только каждую третью задачу Нади (ровно треть). В итоге получилось 15 задач, а изначально предложено было 38. На сколько задач Надя предложила больше, чем Таня?

Ответ: 10

3.3. Алина и Маша хотели составить интересный вариант школьного тура олимпиады. Маша предложила несколько задач и отвергла каждую вторую задачу Алины (ровно половину), Алина тоже предложила несколько задач и не отвергла только каждую третью задачу Маши (ровно треть). В итоге получилось 12 задач, а изначально предложено было 33. На сколько задач Алина предложила меньше, чем Маша?

Ответ: 21

3.4. Кирилл и Паша хотели составить интересный вариант школьного тура олимпиады. Паши предложил несколько задач и отверг каждую вторую задачу Кирилла (ровно половину), Кирилл тоже предложил несколько задач и не отверг только каждую третью задачу Паши (ровно треть). В итоге получилось 14 задач, а изначально предложено было 36. На сколько задач Паша предложил больше, чем Кирилл?

Ответ: 12

3.5. Илья и Вова хотели составить интересный вариант школьного тура олимпиады. Вова предложил несколько задач и отверг каждую вторую задачу Ильи (ровно половину), Илья тоже предложил несколько задач и не отверг только каждую третью задачу Вовы (ровно треть). В итоге получилось 16 задач, а изначально предложено было 34. На сколько задач Вова предложил меньше, чем Илья?

Ответ: 22

4.1. На клетчатом листе закрасили прямоугольник 1×5 . Каждую минуту закрашиваются все те не закрашенные еще клетки, для которых хотя бы одна из соседних по стороне уже закрашена. Например, через минуту будет закрашено 17 клеток. Сколько клеток будет закрашено через 5 минут?

Ответ: 105

Решение 1. Заметим, что через 5 минут мы получим ступенчатую фигуру, в которой по строкам будет 5, 7, 9, 11, 13, 15, 13, 11, 9, 7 и 5 клеток. В сумме это 105.

Решение 2. Заметим, что если укоротить полоску до 1×1 , пропадет $4 \cdot 11 = 44$ клетки. Если в начале всего одна клетка, то за первый ход появится 4 клетки, за второй 8, потом 12, 16, 20. Сложим и получим $44 + 4 + 8 + 12 + 16 + 20 = 104$, и еще одна начальная.

4.2. На клетчатом листе закрасили прямоугольник 1×6 . Каждую минуту закрашиваются все те не закрашенные еще клетки, для которых хотя бы одна из соседних по стороне уже закрашена. Например, через минуту будет закрашено 20 клеток. Сколько клеток будет закрашено через 5 минут?

Ответ: 116

4.3. На клетчатом листе закрасили прямоугольник 1×7 . Каждую минуту закрашиваются все те не закрашенные еще клетки, для которых хотя бы одна из соседних по стороне уже закрашена. Например, через минуту будет закрашено 23 клетки. Сколько клеток будет закрашено через 4 минуты?

Ответ: 95

4.4. На клетчатом листе закрасили прямоугольник 2×3 . Каждую минуту закрашиваются все те не закрашенные еще клетки, для которых хотя бы одна из соседних по стороне уже закрашена. Например, через минуту будет закрашено 16 клеток. Сколько клеток будет закрашено через 4 минуты?

Ответ: 70

4.5. На клетчатом листе закрасили прямоугольник 2×4 . Каждую минуту закрашиваются все те не закрашенные еще клетки, для которых хотя бы одна из соседних по стороне уже закрашена. Например, через минуту будет закрашено 20 клеток. Сколько клеток будет закрашено через 4 минуты?

Ответ: 80

5.1. Девочка по четвергам и пятницам всегда говорит правду, а по понедельникам всегда врёт. В остальные дни недели может сказать правду, а может соврать. Однажды её семь дней подряд спрашивали, в каком году она родилась. В первые шесть дней были получены ответы 2010, 2011, 2012, 2013, 2002, 2011. Какой ответ мог быть получен на седьмой день? Укажите все варианты.

Ответ: 2011 или 2010

Решение. Заметим, что если бы среди указанных 6 дней был бы четверг и пятница, то какие-то два соседних ответа были бы одинаковы. Значит, либо первый день это пятница, либо последний четверг. Откуда и получаем варианты ответов.

5.2. Девочка по субботам и воскресеньям всегда говорит правду, а по вторникам всегда врёт. В остальные дни недели может сказать правду, а может соврать. Однажды её семь дней подряд спрашивали, в каком году она родилась. В первые шесть дней были получены ответы 2015, 2016, 2010, 2011, 2015, 2014. Какой ответ мог быть получен на седьмой день? Укажите все варианты.

Ответ: 2015 или 2014

5.3. Девочка по понедельникам и вторникам всегда говорит правду, а по четвергам всегда врёт. В остальные дни недели может сказать правду, а может соврать. Однажды её семь дней подряд спрашивали, какого числа она родилась. В первые шесть дней были получены ответы 10, 12, 14, 13, 12, 14. Какой ответ мог быть получен на седьмой день? Укажите все варианты.

Ответ: 10 или 14

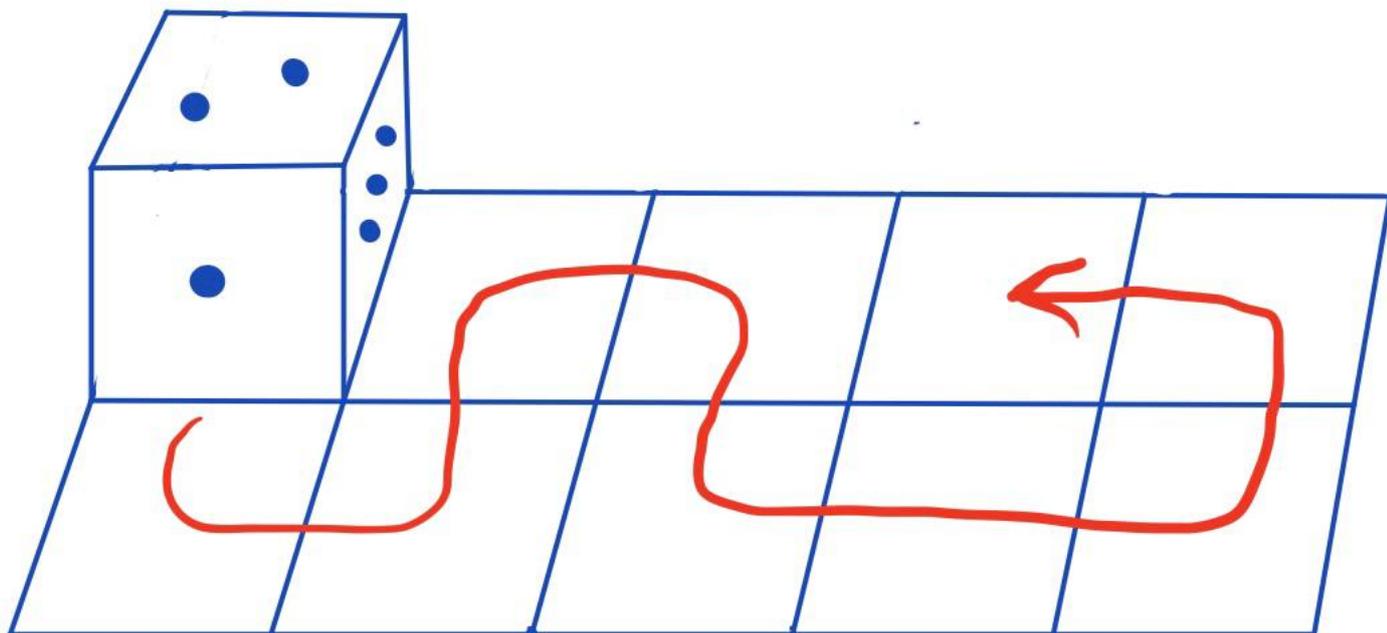
5.4. Мальчик по средам и четвергам всегда говорит правду, а по воскресеньям всегда врёт. В остальные дни недели может сказать правду, а может соврать. Однажды его семь дней подряд спрашивали, какого числа он родился. В первые шесть дней были получены ответы 15, 16, 15, 17, 18, 17. Какой ответ мог быть получен на седьмой день? Укажите все варианты.

Ответ: 15 или 17

5.5. Мальчик по средам и четвергам всегда говорит правду, а по понедельникам всегда врёт. В остальные дни недели может сказать правду, а может соврать. Однажды его семь дней подряд спрашивали, в каком году он родился. В первые шесть дней были получены ответы 2011, 2010, 2012, 2011, 2002, 2012. Какой ответ мог быть получен на седьмой день? Укажите все варианты.

Ответ: 2011 или 2012

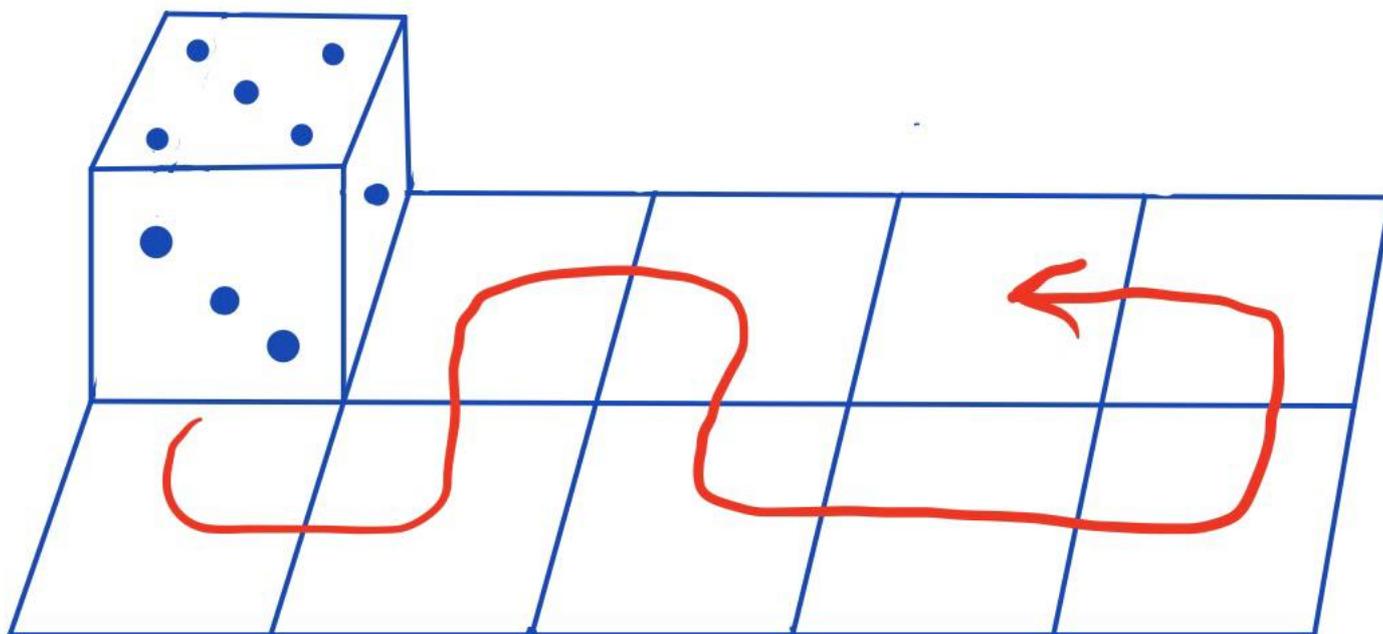
6.1. На плоскости лежит кубик. На каждой грани отмечено от 1 до 6 точек так, что на противоположных гранях в сумме всегда 7 точек. Кубик перекачивают по плоскости как показано на картинке. Сколько точек будет на верхней грани кубика, когда он окажется на последней клетке?



Ответ: 5

Решение. Для того чтобы выяснить ответ, надо представить что вы катите кубик в обратном направлении и каждый раз следить где окажется грань, которая в самом конце будет сверху. Получается, что эта грань будет нижней в исходном положении кубика. Так как на верхней грани 2 точки, то на нижней сейчас 5 точек.

6.2. На плоскости лежит кубик. На каждой грани отмечено от 1 до 6 точек так, что на противоположных гранях в сумме всегда 7 точек. Кубик перекачивают по плоскости как показано на картинке. Сколько точек будет на верхней грани кубика, когда он окажется на последней клетке?



Ответ: 2

6.3. На плоскости лежит кубик. На каждой грани отмечено от 1 до 6 точек так, что на противоположных гранях в сумме всегда 7 точек. Кубик перекачивают по плоскости как показано на картинке.

7.1. На доску выписали шесть подряд идущих чисел. Когда вычеркнули одно из них и сложили оставшиеся, получилось 10085. Какое число могло быть вычеркнуто? Укажите все варианты.

Ответ: 2020 или 2014

Решение. Заметим, что сумма пяти подряд идущих чисел равна среднему из них, умноженному на 5. Если у нас есть пять из шести подряд идущих чисел, и они идут не подряд, то можно увеличить 1, 2, 3 или 4 из них на 1 так, чтобы числа стали подряд идущими. Так как сумма данных нам чисел кратна 5, то они были подряд идущими, иначе мы увеличили не более, чем 4 из них, и сумма опять стала кратной 5.

Таким образом, у нас есть 5 подряд идущих чисел, и среднее из них равно $10085 : 5 = 2017$. Но тогда наши оставшиеся числа это 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, следовательно, вычеркнули 2014 или 2020.

7.2. На доску выписали шесть подряд идущих чисел, вычеркнули одно из них и оставшиеся сложили, получилось 10115. Какое число могло быть вычеркнуто? Укажите все варианты.

Ответ: 2020 или 2026

7.3. На доску выписали шесть подряд идущих чисел, вычеркнули одно из них и оставшиеся сложили, получилось 10235. Какое число могло быть вычеркнуто? Укажите все варианты.

Ответ: 2044 или 2050

7.4. На доску выписали шесть подряд идущих чисел, вычеркнули одно из них и оставшиеся сложили, получилось 10345. Какое число могло быть вычеркнуто? Укажите все варианты.

Ответ: 2066 или 2072

7.5. На доску выписали шесть подряд идущих чисел, вычеркнули одно из них и оставшиеся сложили, получилось 10455. Какое число могло быть вычеркнуто? Укажите все варианты.

Ответ: 2088 или 2094

8.1. *Четырёхзначное число назовем «красивым», если к нему нельзя приписать справа цифру так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 11. А сколько существует красивых чисел, больших 3100 и меньших 3600?*

Ответ: 46

Решение. Заметим, что число 3101 является красивым потому, что 31009 и 31020 делятся на 11, следовательно 3101* на 11 делиться не может. Предположим число красивое, тогда мы нашли 10 подряд идущих чисел, ни одно из которых на 11 не делится, но среди 11 подряд идущих чисел хотя бы одно делится на 11, значит следующее число делится на 11. Это число на 1 больше нашего четырехзначного, к которому приписали 0. Значит число \overline{Zabc} красивое, если $\overline{Zabc} + 1$ делится на 11.

Заметим, что минимальное число в заданном множестве, делящееся на 11 - это 3102, а максимальное - 3597. Этих чисел столько же, сколько частных от деления их на 11: 282, ..., 327, а это $327 - 281 = 46$ чисел

8.2. *Четырёхзначное число назовем «красивым», если к нему нельзя приписать справа цифру так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 11. А сколько существует красивых чисел, больших 4200 и меньших 4900?*

Ответ: 64

8.3. *Четырёхзначное число назовем «красивым», если к нему нельзя приписать справа цифру так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 11. А сколько существует красивых чисел, больших 5300 и меньших 5900?*

Ответ: 55

8.4. *Четырёхзначное число назовем «красивым», если к нему нельзя приписать справа цифру так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 11. А сколько существует красивых чисел, больших 6100 и меньших 6700?*

Ответ: 55

8.5. *Четырёхзначное число назовем «красивым», если к нему нельзя приписать справа цифру так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 11. А сколько существует красивых чисел, больших 7100 и меньших 7900?*

Ответ: 73