Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 6 класса (группа № 4)

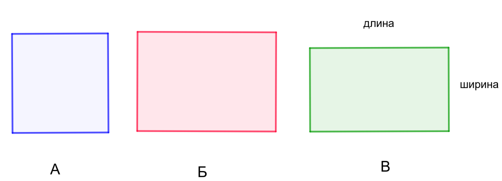
2021/22 учебный год

Максимальное количество баллов — 8.

29 октября 2021 г.

1. **Вариант 1**

   На листе нарисованы три прямоугольника А, Б и В.



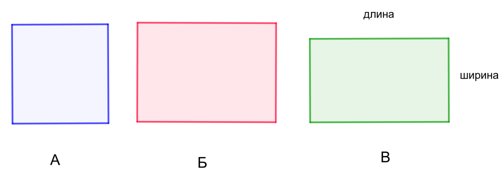
У прямоугольников А и Б одинаковая ширина, а у прямоугольников Б и В – одинаковая длина (ширина – сверху вниз, длина – слева направо). Длина прямоугольника Б больше длины прямоугольника А на 2 см, и площадь Б больше площади прямоугольника А на 22 см^2. Ширина прямоугольника В меньше ширины прямоугольника Б на 4 см, и площадь В меньше площади Б на 40 см^2. Найдите площадь прямоугольника А в квадратных сантиметрах.

Ответ. 88.

Решение. Пусть прямоугольник А имеет длину a см и ширину b см. Если длину увеличить на 2 см, площадь увеличится на $2b$ см^2. Значит, $2b = 22, b = 11$. Площадь прямоугольника В меньше площади Б на 40 см^2, значит, длина прямоугольника Б равна $40 : 4 = 10$ см. Поэтому у прямоугольника А длина равна $a = 10 - 2 = 8$ см. А его площадь равна $ab = 88$ см^2.

Вариант 2

На листе нарисованы три прямоугольника А, Б и В.

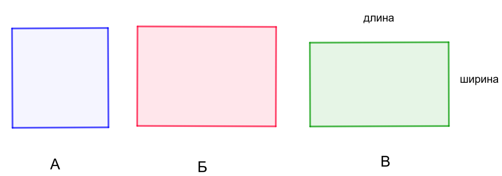


У прямоугольников А и Б одинаковая ширина, а у прямоугольников Б и В – одинаковая длина (ширина – сверху вниз, длина – слева направо). Длина прямоугольника Б больше длины прямоугольника А на 3 см, и площадь Б больше площади А на 21 см^2. Ширина прямоугольника В меньше ширины прямоугольника Б на 3 см, и площадь В меньше площади Б на 60 см^2. Найдите площадь прямоугольника А в квадратных сантиметрах.

Ответ. 119.

Вариант 3

На листе нарисованы три прямоугольника А, Б и В.

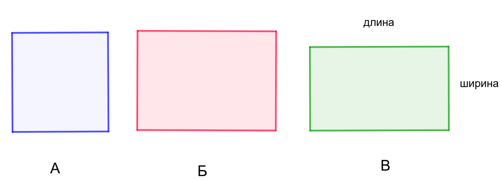


У прямоугольников А и Б одинаковая ширина, а у прямоугольников Б и В – одинаковая длина (ширина – сверху вниз, длина – слева направо). Длина прямоугольника Б больше длины прямоугольника А на 4 см, и площадь Б больше площади А на 48 см^2. Ширина прямоугольника В меньше ширины прямоугольника Б на 3 см, и площадь В меньше площади Б на 39 см^2. Найдите площадь прямоугольника А в квадратных сантиметрах.

Ответ. 108.

Вариант 4

На листе нарисованы три прямоугольника А, Б и В.

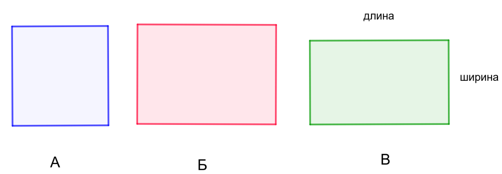


У прямоугольников А и Б одинаковая ширина, а у прямоугольников Б и В – одинаковая длина (ширина – сверху вниз, длина – слева направо). Длина прямоугольника Б больше длины прямоугольника А на 3 см, и площадь Б больше площади А на 33 см^2. Ширина прямоугольника В меньше ширины прямоугольника Б на 4 см, и площадь В меньше площади Б на 52 см^2. Найдите площадь прямоугольника А в квадратных сантиметрах.

Ответ. 110.

Вариант 5

На листе нарисованы три прямоугольника А, Б и В.



У прямоугольников А и Б одинаковая ширина, а у прямоугольников Б и В – одинаковая длина (ширина – сверху вниз, длина – слева направо). Длина прямоугольника Б больше длины прямоугольника А на 4 см, и площадь Б больше площади А на 36 см^2. Ширина прямоугольника В меньше ширины прямоугольника Б на 5 см, и площадь В меньше площади Б на 75 см^2. Найдите площадь прямоугольника А в квадратных сантиметрах.

Ответ. 99.

2. **Вариант 1**

В трёх коробках лежат конфеты. Известно, что в первой коробке конфет в 2 раза меньше, чем во второй. Известно также, что в первой и третьей коробках суммарно 24 конфеты, а во второй и третьей коробках суммарно 34 конфеты. Сколько всего конфет лежат в коробках?

Ответ. 44.

Решение. Из условия следует, что во второй коробке на $34-24=10$ конфет больше, чем в первой. И эта разность равна количеству конфет в первой коробке. Значит, в первой коробке 10 конфет, во второй – 20, а в третьей – 14.

Вариант 2

В трёх коробках лежат конфеты. Известно, что в первой коробке конфет в 2 раза меньше, чем во второй. Известно также, что в первой и третьей коробках суммарно 26 конфет, а во второй и третьей коробках суммарно 36 конфет. Сколько всего конфет лежат в коробках?

Ответ. 46.

Вариант 3

В трёх коробках лежат конфеты. Известно, что в первой коробке конфет в 2 раза меньше, чем во второй. Известно также, что в первой и третьей коробках суммарно 27 конфет, а во второй и третьей коробках суммарно 39 конфет. Сколько всего конфет лежат в коробках?

Ответ. 51.

Вариант 4

В трёх коробках лежат конфеты. Известно, что в первой коробке конфет в 2 раза меньше, чем во второй. Известно также, что в первой и третьей коробках суммарно 22 конфеты, а во второй и третьей коробках суммарно 36 конфет. Сколько всего конфет лежат в коробках?

Ответ. 50.

Вариант 5

В трёх коробках лежат конфеты. Известно, что в первой коробке конфет в 2 раза меньше, чем во второй. Известно также, что в первой и третьей коробках суммарно 28 конфет, а во второй и третьей коробках суммарно 40 конфет. Сколько всего конфет лежат в коробках?

Ответ. 52.

3. **Вариант 1.**

Вася посчитал две суммы: последовательных нечётных чисел от 1 до 2021: $(1+3+5+...+2021)$ и последовательных чётных чисел от 2 до 2020: $(2+4+6+...+2020)$. После чего он из большей суммы вычел меньшую. Какой результат он получил?

Ответ. 1011.

Решение. Найдем разность сумм нечётных и чётных чисел: $(1+3+5+...+2021)-(2+4+6+...+2020)=(2021-2020)+(2019-2018)+\ldots+(3-2)+1=1011$.

Вариант 2.

Вася посчитал две суммы: последовательных нечётных чисел от 1 до 2023: $(1+3+5+...+2023)$ и последовательных чётных чисел от 2 до 2022: $(2+4+6+...+2022)$. После чего он из большей суммы вычел меньшую. Какой результат он получил?

Ответ. 1012.

Вариант 3.

Вася посчитал две суммы: последовательных нечётных чисел от 1 до 2025: $(1+3+5+...+2025)$ и последовательных чётных чисел от 2 до 2024: $(2+4+6+...+2024)$. После чего он из большей суммы вычел меньшую. Какой результат он получил?

Ответ. 1013.

Вариант 4.

Вася посчитал две суммы: последовательных нечётных чисел от 1 до 2027: $(1+3+5+...+2027)$ и последовательных чётных чисел от 2 до 2026: $(2+4+6+...+2026)$. После чего он из большей суммы вычел меньшую. Какой результат он получил?

Ответ. 1014.

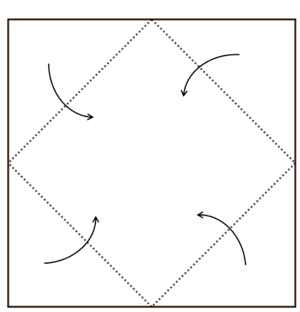
Вариант 5.

Вася посчитал две суммы: последовательных нечётных чисел от 1 до 2029: $(1+3+5+...+2029)$ и последовательных чётных чисел от 2 до 2028: $(2+4+6+...+2028)$. После чего он из большей суммы вычел меньшую. Какой результат он получил?

Ответ. 1015.

4. **Вариант 1.**

Лист бумаги квадратной формы складывают следующим образом: четыре уголка сворачивают к середине так, что они сходятся в одной точке (см. рисунок),



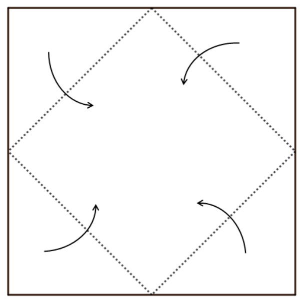
при этом снова получается квадрат. Проделав несколько раз эту операцию, получили квадрат со стороной 3 см, толщиной в 16 листов бумаги. Найдите сторону исходного квадрата в сантиметрах.

Ответ. 12.

Решение. После каждой операции толщина квадрата удваивается, а площадь уменьшается в 2 раза. Так как толщина стала 16 листов, значит операцию применили 4 раза. При этом, площадь уменьшилась в 16 раз и стала равной 9 квадратных сантиметров. Тогда площадь исходного квадрата была равна $16 \times 9 = 12 \times 12 = 144$ квадратных сантиметров. Значит, сторона исходного квадрата равна 12 см.

Вариант 2.

Лист бумаги квадратной формы складывают следующим образом: четыре уголка сворачивают к середине так, что они сходятся в одной точке (см. рисунок),

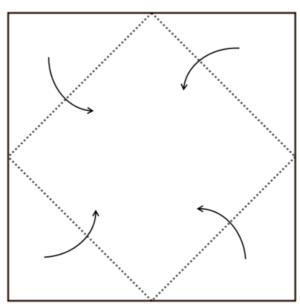


при этом снова получается квадрат. Проделав несколько раз эту операцию, получили квадрат со стороной 6 см, толщиной в 16 листов бумаги. Найдите сторону исходного квадрата в сантиметрах.

Ответ. 24.

Вариант 3.

Лист бумаги квадратной формы складывают следующим образом: четыре уголка сворачивают к середине так, что они сходятся в одной точке (см. рисунок),

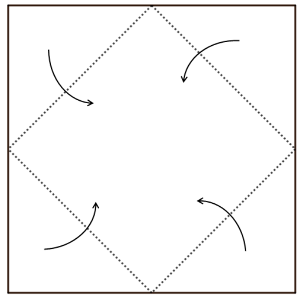


при этом снова получается квадрат. Проделав несколько раз эту операцию, получили квадрат со стороной 5 см, толщиной в 16 листов бумаги. Найдите сторону исходного квадрата в сантиметрах.

Ответ. 20.

Вариант 4.

Лист бумаги квадратной формы складывают следующим образом: четыре уголка сворачивают к середине так, что они сходятся в одной точке (см. рисунок),

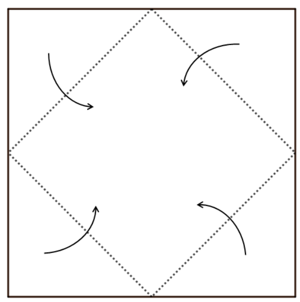


при этом снова получается квадрат. Проделав несколько раз эту операцию, получили квадрат со стороной 7 см, толщиной в 16 листов бумаги. Найдите сторону исходного квадрата в сантиметрах.

Ответ. 28.

Вариант 5.

Лист бумаги квадратной формы складывают следующим образом: четыре уголка сворачивают к середине так, что они сходятся в одной точке (см. рисунок),



при этом снова получается квадрат. Проделав несколько раз эту операцию, получили квадрат со стороной 9 см, толщиной в 16 листов бумаги. Найдите сторону исходного квадрата в сантиметрах.

Ответ. 36.

5. **Вариант 1**

Даны девять карточек, на которых написаны числа 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 9. Из этих карточек сложили три трёхзначных числа А, Б, В, у каждого из которых все три цифры разные. Какое наименьшее значение может быть у выражения А + Б – В?

Ответ. 149.

Решение. Составив наименьшую сумму чисел А и Б, а также наибольшее число В, мы получим наименьшее значение выражения А + Б – В: 566 + 567 – 988 = 145. Но такое разбиение не подходит: у двух чисел есть одинаковые цифры. Поменяв в разряде единиц местами цифры 6 и 8 получим нужное разбиение: 568 + 567 – 986 = 149. Почему такое разбиение – лучшее? При любом другом варианте расстановки в разряде сотен цифр мы получим вклад сотен, равный 200, или 300, ... А в разрядах десятков и единиц мы получим положительные значения, так как сумма любых двух из цифр больше любой третьей цифры. Значит, число А + Б – В будет больше 200. Итак, А и Б начинаются с цифр 5, а В – с цифры 9. Аналогично получаем, что вторые цифры чисел А и Б должны быть 6, а числа В – 8. Про единицы сказано выше.

Вариант 2

Даны девять карточек, на которых написаны числа 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9. Из этих карточек сложили три трёхзначных числа А, Б, В, у каждого из которых все три цифры разные. Какое наименьшее значение может быть у выражения А + Б – В?

Ответ. 148.

Вариант 3

Даны девять карточек, на которых написаны числа 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 8. Из этих карточек сложили три трёхзначных числа А, Б, В, у каждого из которых все три цифры разные. Какое наименьшее значение может быть у выражения А + Б – В?

Ответ. 38.

Вариант 4

Даны девять карточек, на которых написаны числа 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8. Из этих карточек сложили три трёхзначных числа А, Б, В, у каждого из которых все три цифры разные. Какое наименьшее значение может быть у выражения А + Б – В?

Ответ. 37.

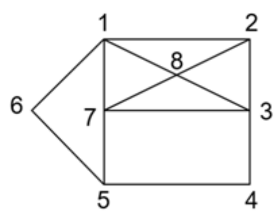
Вариант 5

Даны девять карточек, на которых написаны числа 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9. Из этих карточек сложили три трёхзначных числа А, Б, В, у каждого из которых все три цифры разные. Какое наименьшее значение может быть у выражения А + Б – В?

Ответ. 148.

6. **Вариант 1**

Дан план дорог королевства. Цифрами обозначены города, а отрезки обозначают дороги. Однажды странствующий рыцарь начал путь в одном из городов королевства и сумел построить свой маршрут так, чтобы пройти по каждой дороге ровно один раз. В городе под какой цифрой он мог начать свой маршрут? Укажите все возможные варианты.

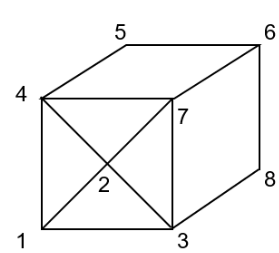


Ответ. 2, 5.

Решение. Если некоторый город не является началом или концом пути рыцаря, то каждый раз, когда он входит по одной дороге, он должен выйти по какой-то другой дороге. Это значит, что дороги из такого города идут «парами», и всего их четное количество. Поэтому города 2 и 5, из которых выходит нечетное число дорог, будут началом и концом пути (в некотором порядке), а остальные города не могут быть ни началом, ни концом пути. Нужные пути существуют. Например, для 5 подойдет путь 5 – 6 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 7 – 1 – 8 – 3 – 7 – 8 – 2, а для 2 подойдет обратный путь.

Вариант 2

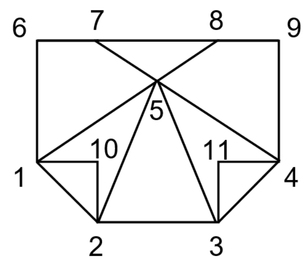
Дан план дорог королевства. Цифрами обозначены города, а отрезки обозначают дороги. Однажды странствующий рыцарь начал путь в одном из городов королевства и сумел построить свой маршрут так, чтобы пройти по каждой дороге ровно один раз. В городе под какой цифрой он мог начать свой маршрут? Укажите все возможные варианты.



Ответ. 1, 6.

Вариант 3

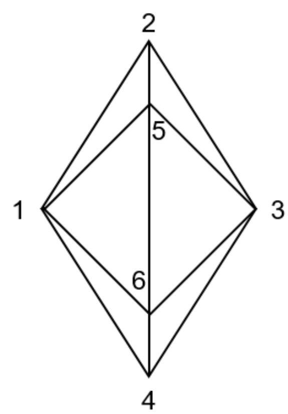
Дан план дорог королевства. Числами обозначены города, а отрезки обозначают дороги. Однажды странствующий рыцарь начал путь в одном из городов королевства и сумел построить свой маршрут так, чтобы пройти по каждой дороге ровно один раз. В городе под каким номером он мог начать свой маршрут? Укажите все возможные варианты.



Ответ. 7, 8.

Вариант 4

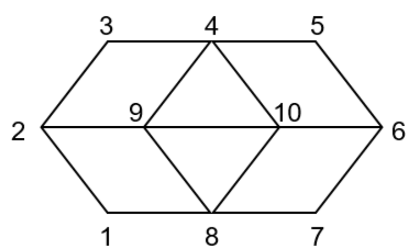
Дан план дорог королевства. Цифрами обозначены города, а отрезки обозначают дороги. Однажды странствующий рыцарь начал путь в одном из городов королевства и сумел построить свой маршрут так, чтобы пройти по каждой дороге ровно один раз. В городе под какой цифрой он мог начать свой маршрут? Укажите все возможные варианты.



Ответ. 2, 4.

Вариант 5

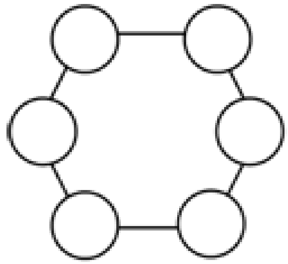
Дан план дорог королевства. Числами обозначены города, а отрезки обозначают дороги. Однажды странствующий рыцарь начал путь в одном из городов королевства и сумел построить свой маршрут так, чтобы пройти по каждой дороге ровно один раз. В городе под каким номером он мог начать свой маршрут? Укажите все возможные варианты.



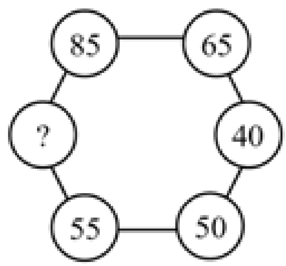
Ответ. 2, 6.

7. **Вариант 1**

На болоте по кругу расположены 6 кочек, соединенных дорожками так, как показано на рисунке.

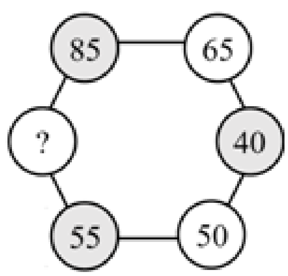


На каждой дорожке сидело несколько лягушек (не обязательно равное количество). Затем каждая лягушка поймала на своей дорожке по 10 мух и положила по 5 мух на каждую из двух кочек, которые соединяла ее дорожка. На пяти кочках указано, сколько мух на них оказалось в итоге. Сколько мух оказалось на шестой кочке?



Ответ. 65.

Решение. Раскрасим кочки по порядку: серая-белая-серая-...



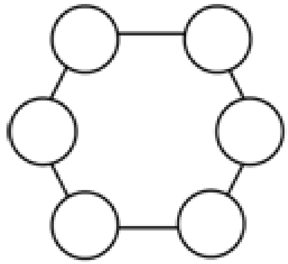
Заметим, что каждая лягушка положила по 5 мух на одну белую и на одну серую кочку. Это значит, что суммарное количество мух, оказавшихся на серых кочках равно количеству мух, оказавшихся на белых кочках (а также в 5 раз больше общего количества лягушек).

1) $85 + 40 + 55 = 180$ (мух) – всего;

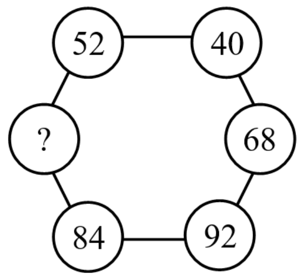
2) $180 - 50 - 65 = 65$ – на шестой кочке.

Вариант 2

На болоте по кругу расположены 6 кочек, соединенных дорожками так, как показано на рисунке.



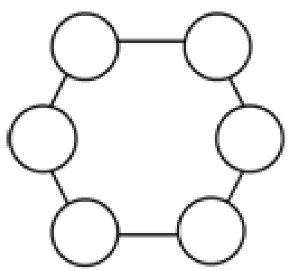
На каждой дорожке сидело несколько лягушек (не обязательно равное количество). Затем каждая лягушка поймала на своей дорожке по 8 мух и положила по 4 мухи на каждую из двух кочек, которые соединяла ее дорожка. На пяти кочках указано, сколько мух на них оказалось в итоге. Сколько мух оказалось на шестой кочке?



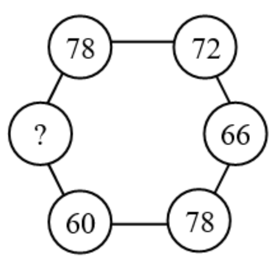
Ответ. 72.

Вариант 3

На болоте по кругу расположены 6 кочек, соединенных дорожками так, как показано на рисунке.



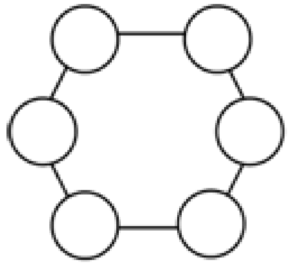
На каждой дорожке сидело несколько лягушек (не обязательно равное количество). Затем каждая лягушка поймала на своей дорожке по 12 мух и положила по 6 мух на каждую из двух кочек, которые соединяла ее дорожка. На пяти кочках указано, сколько мух на них оказалось в итоге. Сколько мух оказалось на шестой кочке?



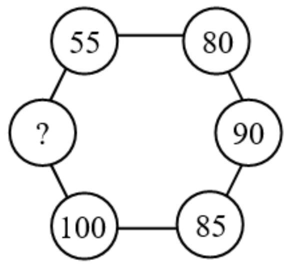
Ответ. 54.

Вариант 4

На болоте по кругу расположены 6 кочек, соединенных дорожками так, как показано на рисунке.



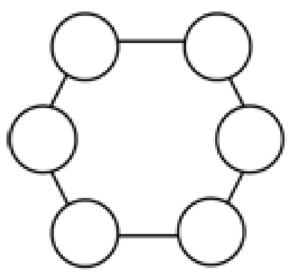
На каждой дорожке сидело несколько лягушек (не обязательно равное количество). Затем каждая лягушка поймала на своей дорожке по 10 мух и положила по 5 мух на каждую из двух кочек, которые соединяла ее дорожка. На пяти кочках указано, сколько мух на них оказалось в итоге. Сколько мух оказалось на шестой кочке?



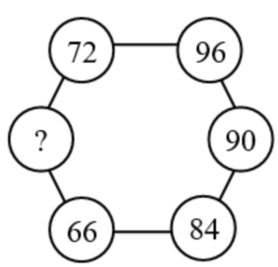
Ответ. 80.

Вариант 5

На болоте по кругу расположены 6 кочек, соединенных дорожками так, как показано на рисунке.



На каждой дорожке сидело несколько лягушек (не обязательно равное количество). Затем каждая лягушка поймала на своей дорожке по 12 мух и положила по 6 мух на каждую из двух кочек, которые соединяла ее дорожка. На пяти кочках указано, сколько мух на них оказалось в итоге. Сколько мух оказалось на шестой кочке?



Ответ. 48.

8. **Вариант 1.**

Каждый из 10 учащихся придумал по 5 натуральных чисел. Оказалось, что каждое число придумано не менее чем тремя учащимися. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть придумано?

Ответ. 16.

Решение. Всего учащиеся придумали 50 чисел, при этом каждое число посчитано не менее 3-х раз. Докажем, что более 16 различных чисел не могло быть придумано. Если было придумано хотя бы 17 различных чисел и каждое хотя бы тремя учащимися, то всего было придумано не менее чем $17 \cdot 3 = 51$ число. Противоречие. Пример, когда придумано 16 чисел. Пусть числа 1, 2 придумали по 4 учащихся, 3-16 – по 3 учащихся. Тогда всего придумано $2 \cdot 4 + 14 \cdot 3 = 8 + 42 = 50$ чисел и каждое не менее 3 учащимися.

Вариант 2.

Каждый из 11 учащихся придумал по 5 натуральных чисел. Оказалось, что каждое число придумано не менее чем тремя учащимися. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть придумано?

Ответ. 18.

Вариант 3.

Каждый из 13 учащихся придумал по 5 натуральных чисел. Оказалось, что каждое число придумано не менее чем тремя учащимися. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть придумано?

Ответ. 21.

Вариант 4.

Каждый из 10 учащихся придумал по 5 натуральных чисел. Оказалось, что каждое число придумано не менее чем четыремя учащимися. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть придумано?

Ответ. 12.

Вариант 5.

Каждый из 18 учащихся придумал по 5 натуральных чисел. Оказалось, что каждое число придумано не менее чем четыремя учащимися. Какое наибольшее количество различных чисел могло быть придумано?

Ответ. 22.