Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 7 класса (группа № 4)

2021/22 учебный год

Максимальное количество баллов — 8.

25 октября 2021 г.

7 класс

1. **Вариант 1.**

   Найдите значение выражения $101 + 102 - 103 - 104 + 105 + 106 - 107 - 108 + ... - 619$?

   Ответ. 100.

   Решение. Вычтем и добавим в конце выражения число 620. Тогда числа от 101 до 620 разобьются на $(620-100) : 4 = 130$ четвёрок. И в каждой четвёрке сумма чисел будет равна -4. Тогда значение выражения будет равно $(101 + 102 - 103 - 104) + (105 + 106 - 107 - 108) + ... - 619 - 620) + 620 = 130(-4) + 620 = 100$.

   Вариант 2.

   Найдите значение выражения $97 + 98 - 99 - 100 + 101 + 102 - 103 - 104 + ... - 723$?

   Ответ. 96.

   Вариант 3.

   Найдите значение выражения $101 + 102 - 103 - 104 + 105 + 106 - 107 - 108 + ... - 827$?

   Ответ. 100.

   Вариант 4.

   Найдите значение выражения $97 + 98 - 99 - 100 + 101 + 102 - 103 - 104 + ... - 915$?

   Ответ. 96.

   Вариант 5.

   Найдите значение выражения $101 + 102 - 103 - 104 + 105 + 106 - 107 - 108 + ... - 511$?

   Ответ. 100.

2. **Вариант 1**

   На листе нарисованы два прямоугольника. Известно, что и длина, и ширина второго прямоугольника на 3 см больше, чем длина и ширина первого, а площадь второго прямоугольника на 48 см^2 больше площади первого прямоугольника. Найдите периметр второго прямоугольника.

   Ответ. 38.

Решение. Пусть первый прямоугольник имеет длину a см и ширину b см. Тогда у второго прямоугольника длина равна $a+3$ см, а ширина равна $b+3$ см. Из условия следует, что $(a+3)(b+3)-ab = 48$, тогда $3(a+b) = 39$, $a+b = 13$ и $(a+3)+(b+3) = 19$. Значит, периметр равен 38 см.

Вариант 2

На листе нарисованы два прямоугольника. Известно, что и длина, и ширина второго прямоугольника на 4 см больше, чем длина и ширина первого, а площадь второго прямоугольника на 56 см^2 больше площади первого. Найдите периметр второго прямоугольника.

Ответ. 36.

Вариант 3

На листе нарисованы два прямоугольника. Известно, что и длина, и ширина второго прямоугольника на 5 см больше, чем длина и ширина первого, а площадь второго прямоугольника на 70 см^2 больше площади первого. Найдите периметр второго прямоугольника.

Ответ. 38.

Вариант 4

На листе нарисованы два прямоугольника. Известно, что и длина, и ширина второго прямоугольника на 6 см больше, чем длина и ширина первого, а площадь второго прямоугольника на 96 см^2 больше площади первого. Найдите периметр второго прямоугольника.

Ответ. 44.

Вариант 5

На листе нарисованы два прямоугольника. Известно, что и длина, и ширина второго прямоугольника на 7 см больше, чем длина и ширина первого, а площадь второго прямоугольника на 98 см^2 больше площади первого. Найдите периметр второго прямоугольника.

Ответ. 42.

3. **Вариант 1.**

Вдоль дороги через равные расстояния поставили 10 фонарных столбов, и расстояние между крайними столбами составило k метров. Вдоль другой дороги через такие же расстояния поставили 100 фонарных столбов, и расстояние между крайними столбами составило m метров. Найдите отношение $m : k$.

Ответ. 11.

Решение. Пусть расстояние между соседними столбами x метров. Тогда в первом случае расстояние между крайними столбами равно $(10-1)x = 9x = k$ метров. А во втором случае – $(100-1)x = 99x = m$ метров. Значит, искомое отношение есть $m : k = (99x) : (9x) = 11$.

Вариант 2.

Вдоль дороги через равные расстояния поставили 8 фонарных столбов, и расстояние между крайними столбами составило k метров. Вдоль другой дороги через такие же расстояния поставили 400 фонарных столбов, и расстояние между крайними столбами составило m метров. Найдите отношение $m : k$.

Ответ. 57.

Вариант 3.

Вдоль дороги через равные расстояния поставили 8 фонарных столбов, и расстояние между крайними столбами составило k метров. Вдоль другой дороги через такие же расстояния поставили 50 фонарных столбов, и расстояние между крайними столбами составило m метров. Найдите отношение $m : k$.

Ответ. 7.

Вариант 4.

Вдоль дороги через равные расстояния поставили 12 фонарных столбов, и расстояние между крайними столбами составило k метров. Вдоль другой дороги через такие же расстояния поставили 100 фонарных столбов, и расстояние между крайними столбами составило m метров. Найдите отношение $m : k$.

Ответ. 9.

Вариант 5.

Вдоль дороги через равные расстояния поставили 20 фонарных столбов, и расстояние между крайними столбами составило k метров. Вдоль другой дороги через такие же расстояния поставили 400 фонарных столбов, и расстояние между крайними столбами составило m метров. Найдите отношение $m : k$.

Ответ. 21.

4. **Вариант 1.**

Велосипедисты Алексей, Виталий и Сергей принимали участие в заезде на 10 км. В тот момент, когда Алексей приехал на финиш, Виталию оставалось проехать 1 км. А когда Виталий приехал на финиш, Сергею оставалось проехать 1 км. На сколько километров на финише Алексей опередил Сергея?

Ответ. 1,9.

Решение. Скорость Виталия составляет 0,9 от скорости Алексея, а скорость Сергея составляет 0,9 от скорости Виталия, т.е. 0,81 от скорости Алексея. Значит, когда Алексей проехал 10 км, Сергей проехал $10 \cdot 0,81 = 8,1$ км. Поэтому Алексей опредил Сергея на $10 - 8,1 = 1,9$ км.

Вариант 2.

Велосипедисты Алексей, Виталий и Сергей принимали участие в заезде на 10 км. В тот момент, когда Алексей приехал на финиш, Виталию оставалось проехать 2 км. А когда Виталий приехал на финиш, Сергею оставалось проехать 1 км. На сколько километров на финише Алексей опередил Сергея?

Ответ. 2,8.

Вариант 3.

Велосипедисты Алексей, Виталий и Сергей принимали участие в заезде на 10 км. В тот момент, когда Алексей приехал на финиш, Виталию оставалось проехать 2 км. А когда Виталий приехал на финиш, Сергею оставалось проехать 2 км. На сколько километров на финише Алексей опередил Сергея?

Ответ. 3,6.

Вариант 4.

Велосипедисты Алексей, Виталий и Сергей принимали участие в заезде на 10 км. В тот момент, когда Алексей приехал на финиш, Виталию оставалось проехать 1 км. А когда Виталий приехал на финиш, Сергею оставалось проехать 3 км. На сколько километров на финише Алексей опередил Сергея?

Ответ. 3,7.

Вариант 5.

Велосипедисты Алексей, Виталий и Сергей принимали участие в заезде на 10 км. В тот момент, когда Алексей приехал на финиш, Виталию оставалось проехать 1 км. А когда Виталий приехал на финиш, Сергею оставалось проехать 2 км. На сколько километров на финише Алексей опередил Сергея?

Ответ. 2,8.

5. **Вариант 1**

У барона Мюнхгаузена в 14:00 сломались часы. Теперь первые 30 секунд каждой минуты они идут в 2 раза быстрее чем обычно, а вторые 30 секунд – в 2 раза медленнее, чем обычно. У барона назначена важная встреча в 14:40. Какое время в этот момент будут показывать его часы?

Ответ. 14:50

Решение. Заметим, что первые полминуты часы проходят за 15 сек., а вторые полминуты – за 1 минуту. Значит 1 минута реального времени, по часам Мюнхгаузена длится 1 мин. 15 сек. или 1,25 мин. Тогда 40 минут – $40 \cdot 1,25 = 50$ мин.

Вариант 2

У барона Мюнхгаузена в 15:00 сломались часы. Теперь первые 30 секунд каждой минуты они идут в 2 раза быстрее чем обычно, а вторые 30 секунд – в 2 раза медленнее, чем обычно. У барона назначена важная встреча в 15:40. Какое время в этот момент будут показывать его часы?

Ответ. 15:50

Вариант 3

У барона Мюнхгаузена в 16:00 сломались часы. Теперь первые 30 секунд каждой минуты они идут в 2 раза быстрее чем обычно, а вторые 30 секунд – в 2 раза медленнее, чем обычно. У барона назначена важная встреча в 16:40. Какое время в этот момент будут показывать его часы?

Ответ. 16:50

Вариант 4

У барона Мюнхгаузена в 13:00 сломались часы. Теперь первые 30 секунд каждой минуты они идут в 2 раза быстрее чем обычно, а вторые 30 секунд – в 2 раза медленнее, чем обычно. У барона назначена важная встреча в 13:40. Какое время в этот момент будут показывать его часы?

Ответ. 13:50

Вариант 5

У барона Мюнхгаузена в 11:00 сломались часы. Теперь первые 30 секунд каждой минуты они идут в 2 раза быстрее чем обычно, а вторые 30 секунд – в 2 раза медленнее, чем обычно. У барона назначена важная встреча в 11:40. Какое время в этот момент будут показывать его часы?

Ответ. 11:50

6. **Вариант 1** Саша написал на доске число 765476547654. Он хочет стереть несколько цифр так, чтобы оставшиеся цифры образовывали наибольшее возможное число, кратное 9. Что это за число?

   Ответ. 7654765464.

   Решение. Сумма цифр исходного числа $3 \cdot (7+6+5+4) = 66$. Из признака делимости на 9 следует, что сумма стертых цифр должна давать остаток 3 при делении на 9. Цифры с суммой 3 выбрать нельзя. С суммой $3+9 = 12$ можно выбрать 2 цифры, а с суммой $12+9 = 21$ и более можно взять уже только не менее 3 цифр. Из двух чисел больше то, в записи которого больше цифр, поэтому убирать надо две цифры с суммой 12 — 7 и 5 или 6 и 6. Из двух десятиразрядных чисел больше то, у которого в старших разрядах стоят бОльшие цифры. Поэтому нужно стереть последнюю «5» и последнюю «7».

   Вариант 2 Саша написал на доске число 764576457645. Он хочет стереть несколько цифр так, чтобы оставшиеся цифры образовывали наибольшее возможное число, кратное 9. Что это за число?

   Ответ. 7647645645.

   Вариант 3 Саша написал на доске число 674567456745. Он хочет стереть несколько цифр так, чтобы оставшиеся цифры образовывали наибольшее возможное число, кратное 9. Что это за число?

   Ответ. 7457456745.

Вариант 4 Саша написал на доске число 456745674567. Он хочет стереть несколько цифр так, чтобы оставшиеся цифры образовывали наибольшее возможное число, кратное 9. Что это за число?

Ответ. 4674567456.

Вариант 5 Саша написал на доске число 546754675467. Он хочет стереть несколько цифр так, чтобы оставшиеся цифры образовывали наибольшее возможное число, кратное 9. Что это за число?

Ответ. 5475475467.

7. **Вариант 1**

   В саду растет 26 деревьев – яблони и груши. Оказалось, что среди любых 18 деревьев обязательно есть хотя бы одна яблоня, а среди любых 10 деревьев есть хотя бы одна груша. Сколько груш в саду?

   Ответ. 17.

   Решение. Так как среди 18 деревьев найдется хотя бы одна яблоня, то груш не более 17, а так как среди любых 10 деревьев найдется хотя бы одна груша, то яблонь не более 9. Всего деревьев 26, значит яблонь – 9, а груш – 17.

   Вариант 2

   В саду растет 26 деревьев – яблони и груши. Оказалось, что среди любых 18 деревьев обязательно есть хотя бы одна яблоня, а среди любых 10 деревьев есть хотя бы одна груша. Сколько яблонь в саду?

   Ответ. 9.

   Вариант 3

   В саду растет 27 деревьев – яблони и груши. Оказалось, что среди любых 19 деревьев обязательно есть хотя бы одна яблоня, а среди любых 10 деревьев есть хотя бы одна груша. Сколько груш в саду?

   Ответ. 18.

   Вариант 4

   В саду растет 27 деревьев – яблони и груши. Оказалось, что среди любых 18 деревьев обязательно есть хотя бы одна яблоня, а среди любых 11 деревьев есть хотя бы одна груша. Сколько яблонь в саду?

   Ответ. 10.

   Вариант 5

   В саду растет 29 деревьев – яблони и груши. Оказалось, что среди любых 19 деревьев обязательно есть хотя бы одна яблоня, а среди любых 12 деревьев есть хотя бы одна груша. Сколько яблонь в саду?

   Ответ. 11.

8. **Вариант 1**

   Петя выписал на доску все положительные числа, на которые делится некоторое натуральное число N. Оказалось, что сумма двух наибольших выписанных чисел равна 3333. Найдите все такие N. Если чисел несколько, в ответ запишите их сумму.

   Ответ. 2222.

   Решение. Заметим, что одно из выписанных чисел будет равно N. Так как сумма двух наибольших выписанных чисел нечетна, то эти числа разной четности. Значит число 2 – делитель N, тогда второе число – это $N/2$. По условию $N + N/2 = 3333$. Отсюда $N = 2222$.

   Вариант 2

Петя выписал на доску все положительные числа, на которые делится некоторое натуральное число N. Оказалось, что сумма двух наибольших выписанных чисел равна 3021. Найдите все такие N. Если чисел несколько, в ответ запишите их сумму.

Ответ. 2014.

Вариант 3

Петя выписал на доску все положительные числа, на которые делится некоторое натуральное число N. Оказалось, что сумма двух наибольших выписанных чисел равна 6663. Найдите все такие N. Если чисел несколько, в ответ запишите их сумму.

Ответ. 4442.

Вариант 4

Петя выписал на доску все положительные числа, на которые делится некоторое натуральное число N. Оказалось, что сумма двух наибольших выписанных чисел равна 3201. Найдите все такие N. Если чисел несколько, в ответ запишите их сумму.

Ответ. 2134.

Вариант 5

Петя выписал на доску все положительные числа, на которые делится некоторое натуральное число N. Оказалось, что сумма двух наибольших выписанных чисел равна 2301. Найдите все такие N. Если чисел несколько, в ответ запишите их сумму.

Ответ. 1534.