Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 8 класса (группа № 4)

2021/22 учебный год

Максимальное количество баллов — 8.

25 октября 2021 г.

1. **Вариант 1**

   Велосипедист едет по треку с постоянной скоростью. Известно, что в 11:22 он проехал в $1,4$ раза больший путь, чем в 11:08. Когда он стартовал?

   Ответ оформите по образцу: 15:45.

   Ответ. 10:33.

   Решение. Пусть до 11:08 велосипедист проехал x км, тогда к 11:22 он проехал $1,4x$ км. Значит, за 14 минут (от 11:08 до 11:22) он проехал $0,4x$ км. Чтобы проехать x км ему потребовалось в два с половиной раза больше времени, то есть 35 минут.

   Вариант 2

   Велосипедист едет по треку с постоянной скоростью. Известно, что в 11:43 он проехал в $1,4$ раза больший путь, чем в 11:29. Когда он стартовал?

   Ответ оформите по образцу: 15:45.

   Ответ. 10:54.

   Вариант 3

   Велосипедист едет по треку с постоянной скоростью. Известно, что в 09:12 он проехал в $1,4$ раза больший путь, чем в 08:58. Когда он стартовал?

   Ответ оформите по образцу: 15:45.

   Ответ. 08:23.

   Вариант 4

   Велосипедист едет по треку с постоянной скоростью. Известно, что в 10:26 он проехал в $1,4$ раза больший путь, чем в 10:12. Когда он стартовал?

   Ответ оформите по образцу: 15:45.

   Ответ. 09:37.

   Вариант 5

   Велосипедист едет по треку с постоянной скоростью. Известно, что в 13:11 он проехал в $1,4$ раза больший путь, чем в 12:57. Когда он стартовал?

Ответ оформите по образцу: 15:45.

Ответ. 12:22.

2. **Вариант 1**

Маша написала на листке число 547654765476. Она вычеркнула несколько цифр так, что получилось максимально возможное кратное 9 число. Что это за число?

Ответ. 5476547646.

Решение. Сумма цифр исходного числа $3\cdot(7+6+5+4) = 66$. Из признака делимости на 9 следует, что сумма стертых цифр должна давать остаток 3 при делении на 9. Цифры с суммой 3 выбрать нельзя. С суммой $3+9 = 12$ можно выбрать 2 цифры, а с суммой $12+9 = 21$ и более можно взять уже только не менее 3 цифр. Из двух чисел больше то, в записи которого больше цифр, поэтому убирать надо две цифры с суммой 12 – 7 и 5 или 6 и 6. Из двух десятиразрядных чисел больше то, у которого в старших разрядах стоят большие цифры. Поэтому нужно стереть последнюю «5» и последнюю «7».

Вариант 2

Маша написала на листке число 564756475647. Она вычеркнула несколько цифр так, что получилось максимально возможное кратное 9 число. Что это за число?

Ответ. 6475647564.

Вариант 3

Маша написала на листке число 576457645764. Она вычеркнула несколько цифр так, что получилось максимально возможное кратное 9 число. Что это за число?

Ответ. 7645764564.

Вариант 4

Маша написала на листке число 675467546754. Она вычеркнула несколько цифр так, что получилось максимально возможное кратное 9 число. Что это за число?

Ответ. 7547546754.

Вариант 5

Маша написала на листке число 457645764576. Она вычеркнула несколько цифр так, что получилось максимально возможное кратное 9 число. Что это за число?

Ответ. 4764576456.

3. **Вариант 1**

Вася вырезал из картона треугольник и пронумеровал его вершины цифрами 1, 2, 3. Оказалось, что если Васин треугольник повернуть 12 раз по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 1 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Если Васин треугольник повернуть 6 раз по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 2 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Вася утверждает, что если повернуть его треугольник n раз вокруг вершины под номером 3 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Какое минимальное n мог назвать Вася так, чтобы его утверждение было правдивым хотя бы для какого-то картонного треугольника?

Ответ. 4.

Решение. Поскольку за 12 поворотов вокруг первой вершины треугольник оказывается в исходном положении, то он совершает один или несколько полных оборотов в $360°$. Значит угол при первой вершине не меньше $30°$. Рассуждая аналогично получаем, что угол при второй вершине не меньше $60°$. Значит угол при третьей вершине по сумме углов треугольника не более $90°$ и $n \geq 4$. Четырех поворотов достаточно: подойдет треугольник с углами $30°$, $60°$ и $90°$.

Вариант 2

Вася вырезал из картона треугольник и пронумеровал его вершины цифрами 1, 2, 3. Оказалось, что если Васин треугольник повернуть 24 раза по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 1 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Если Васин треугольник повернуть 8 раз по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 2 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Вася утверждает, что если повернуть его треугольник n раз вокруг вершины под номером 3 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Какое минимальное n мог назвать Вася так, чтобы его утверждение было правдивым хотя бы для какого-то картонного треугольника?

Ответ. 3.

Вариант 3

Вася вырезал из картона треугольник и пронумеровал его вершины цифрами 1, 2, 3. Оказалось, что если Васин треугольник повернуть 10 раз по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 1 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Если Васин треугольник повернуть 5 раз по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 2 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Вася утверждает, что если повернуть его треугольник n раз вокруг вершины под номером 3 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Какое минимальное n мог назвать Вася так, чтобы его утверждение было правдивым хотя бы для какого-то картонного треугольника?

Ответ. 5.

Вариант 4

Вася вырезал из картона треугольник и пронумеровал его вершины цифрами 1, 2, 3. Оказалось, что если Васин треугольник повернуть 18 раз по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 1 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Если Васин треугольник повернуть 3 раза по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 2 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Вася утверждает, что если повернуть его треугольник n раз вокруг вершины под номером 3 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Какое минимальное n мог назвать Вася так, чтобы его утверждение было правдивым хотя бы для какого-то картонного треугольника?

Ответ. 9.

Вариант 5

Вася вырезал из картона треугольник и пронумеровал его вершины цифрами 1, 2, 3. Оказалось, что если Васин треугольник повернуть 15 раз по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 1 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Если Васин треугольник повернуть 3 раза по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 2 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Вася утверждает, что если повернуть его треугольник n раз вокруг вершины под номером 3 на угол, равный углу при этой вершине, то он вернется в исходное положение. Какое минимальное n мог назвать Вася так, чтобы его утверждение было правдивым хотя бы для какого-то картонного треугольника?

Ответ. 10.

4. **Вариант 1**

Некоторое число с суммой цифр 2021 поделили на 7 и получили число, которое записывается только цифрами 7. Какое количество цифр 7 может быть в нем? Если ответов несколько, укажите их сумму.

Ответ. 503.

Решение. Перемножив в столбик 777...77 и 7, получим 54...439. Пусть x – количество семерок в исходном числе, тогда количество четверок в полученном произведении равно $x-2$. Его сумма цифр равна $4(x-2)+5+3+9=4x+9$, но с другой стороны она равна 2021, поэтому $x=\frac{2021-9}{4}=\frac{2012}{4}=503$.

Вариант 2

Некоторое число с суммой цифр 3333 поделили на 7 и получили число, которое записывается только цифрами 7. Какое количество цифр 7 может быть в нем? Если ответов несколько, укажите их сумму.

Ответ. 831.

Вариант 3

Некоторое число с суммой цифр 7777 поделили на 7 и получили число, которое записывается только цифрами 7. Какое количество цифр 7 может быть в нем? Если ответов несколько, укажите их сумму.

Ответ. 1942.

Вариант 4

Некоторое число с суммой цифр 4321 поделили на 7 и получили число, которое записывается только цифрами 7. Какое количество цифр 7 может быть в нем? Если ответов несколько, укажите их сумму.

Ответ. 1078.

Вариант 5

Некоторое число с суммой цифр 2345 поделили на 7 и получили число, которое записывается только цифрами 7. Какое количество цифр 7 может быть в нем? Если ответов несколько, укажите их сумму.

Ответ. 584.

5. **Вариант 1**

Из единичных кубиков собрали большой куб. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 4 соседа, равно 132. Найдите количество кубиков, у которых ровно 5 соседей.

Ответ. 726.

Решение. Кубики, у которых ровно 4 соседа, примыкают ровно к одному ребру большого куба. Всего ребер у большого куба 12, тогда к каждому примыкает по 11 таких кубиков. Значит кубиков, которые располагаются строго внутри каждой из граней, будет $11 \cdot 11 = 121$ штука. Всего граней 6, получаем ответ: $121 \cdot 6 = 726$.

Вариант 2

Из единичных кубиков собрали большой куб. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 4 соседа, равно 84. Найдите количество кубиков, у которых ровно 5 соседей.

Ответ. 294.

Вариант 3

Из единичных кубиков собрали большой куб. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 4 соседа, равно 156. Найдите количество кубиков, у которых ровно 5 соседей.

Ответ. 1014.

Вариант 4

Из единичных кубиков собрали большой куб. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 4 соседа, равно 108. Найдите количество кубиков, у которых ровно 5 соседей.

Ответ. 486.

Вариант 5

Из единичных кубиков собрали большой куб. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 4 соседа, равно 180. Найдите количество кубиков, у которых ровно 5 соседей.

Ответ. 1350.

6. **Вариант 1**

Даша насыпала рыбкам в аквариум 9 грамм корма. За первую минуту они съели половину корма, за вторую – треть от оставшегося корма, за третью – четверть от оставшегося и т.д., за девятую минуту – десятую часть оставшегося корма. Сколько грамм корма осталось плавать в аквариуме?

Ответ. 0,9.

Решение. После первой минуты осталась $\frac{1}{2}$ исходного корма, после второй – $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$, и т.д. аналогично – после 9-ой минуты останется $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$ изначального количества корма, т.е. $0,9$ грамм.

Вариант 2

Даша насыпала рыбкам в аквариум 8 грамм корма. За первую минуту они съели половину корма, за вторую – треть от оставшегося корма, за третью – четверть от оставшегося и т.д., за девятую минуту – десятую часть оставшегося корма. Сколько грамм корма осталось плавать в аквариуме?

Ответ. 0,8.

Вариант 3

Даша насыпала рыбкам в аквариум 7 грамм корма. За первую минуту они съели половину корма, за вторую – треть от оставшегося корма, за третью – четверть от оставшегося и т.д., за девятую минуту – десятую часть оставшегося корма. Сколько грамм корма осталось плавать в аквариуме?

Ответ. 0,7.

Вариант 4

Даша насыпала рыбкам в аквариум 6 грамм корма. За первую минуту они съели половину корма, за вторую – треть от оставшегося корма, за третью – четверть от оставшегося и т.д., за девятую минуту – десятую часть оставшегося корма. Сколько грамм корма осталось плавать в аквариуме?

Ответ. 0,6.

Вариант 5

Даша насыпала рыбкам в аквариум 5 грамм корма. За первую минуту они съели половину корма, за вторую – треть от оставшегося корма, за третью – четверть от оставшегося и т.д., за девятую минуту – десятую часть оставшегося корма. Сколько грамм корма осталось плавать в аквариуме?

Ответ. 0,5.

7. **Вариант 1**

В саду растет 46 деревьев – яблони и груши. Оказалось, что среди любых 28 деревьев обязательно есть хотя бы одна яблоня, а среди любых 20 деревьев есть хотя бы одна груша. Сколько груш в саду?

Ответ. 27.

Решение. Так как среди 28 деревьев найдется хотя бы одна яблоня, то груш не более 27, а так как среди любых 20 деревьев найдется хотя бы одна груша, то яблонь не более 19. Всего деревьев 46, значит яблонь – 19, а груш – 27.

Вариант 2

В саду растет 46 деревьев – яблони и груши. Оказалось, что среди любых 28 деревьев обязательно есть хотя бы одна яблоня, а среди любых 20 деревьев есть хотя бы одна груша. Сколько яблонь в саду?

Ответ. 19.

Вариант 3

В саду растет 47 деревьев – яблони и груши. Оказалось, что среди любых 29 деревьев обязательно есть хотя бы одна яблоня, а среди любых 20 деревьев есть хотя бы одна груша. Сколько груш в саду?

Ответ. 28.

Вариант 4

В саду растет 47 деревьев – яблони и груши. Оказалось, что среди любых 28 деревьев обязательно есть хотя бы одна яблоня, а среди любого 21 дерева есть хотя бы одна груша. Сколько яблонь в саду?

Ответ. 20.

Вариант 5

В саду растет 49 деревьев – яблони и груши. Оказалось, что среди любых 29 деревьев обязательно есть хотя бы одна яблоня, а среди любых 22 деревьев есть хотя бы одна груша. Сколько яблонь в саду?

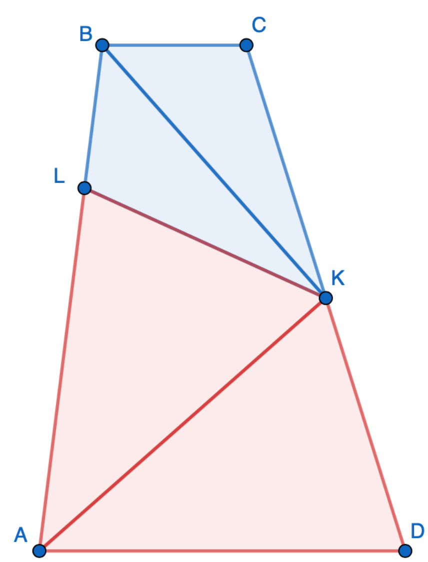
Ответ. 21.

8. **Вариант 1**

В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) биссектрисы углов DAB и ABC пересеклись на стороне CD. Найдите AB, если $AD = 5, BC = 2$.

Ответ. 7.

Решение.



Отметим точку L на стороне AB так, что $LB = BC$. Пусть K – точка пересечения биссектрис углов DAB и ABC. Тогда треугольники LBK и BCK равны по углу и двум прилежащим к нему сторонам $\Rightarrow \angle BLK = \angle BCK$. Откуда $\angle ALK = 180° - \angle BLK = 180° - \angle BCK = \angle ADC$ (последнее равенство верно в силу $AD \parallel BC$). Наконец, $\Delta ALK = \Delta ADC$ по углам и общей стороне. Значит, $AB = AD + BC$.

Вариант 2

В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ биссектрисы углов DAB и ABC пересеклись на стороне CD. Найдите AB, если $AD = 5, BC = 3$.

Ответ. 8.

Вариант 3

В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ биссектрисы углов DAB и ABC пересеклись на стороне CD. Найдите AB, если $AD = 7, BC = 2$.

Ответ. 9.

Вариант 4

В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ биссектрисы углов DAB и ABC пересеклись на стороне CD. Найдите AB, если $AD = 11, BC = 5$.

Ответ. 16.

Вариант 5

В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ биссектрисы углов DAB и ABC пересеклись на стороне CD. Найдите AB, если $AD = 10, BC = 3$.

Ответ. 13.