Разбор заданий школьного этапа ВсОШ по математике для 9 класса (группа № 4)

2021/22 учебный год

Максимальное количество баллов — 8.

25 октября 2021 г.

9 класс

1. **Вариант 1.**

   Вася бьет по струнам 6-струнной гитары от 1 до 6 и обратно. Каждый следующий удар приходится на соседнюю струну. На струну с каким номером придется 2000-й удар? (Порядок удара струн: 1-2-3-4-5-6-5-4-3-2-1-2-...)

   Ответ. 2.

   Решение. На первую струну приходятся удары 1, 11, 21, 31, ..., 2001. Поэтому 2000-й удар придется на 2-ю струну.

   Вариант 2.

   Вася бьет по струнам 6-струнной гитары от 1 до 6 и обратно. Каждый следующий удар приходится на соседнюю струну. На струну с каким номером придется 2019-й удар? (Порядок удара струн: 1-2-3-4-5-6-5-4-3-2-1-2-...)

   Ответ. 3.

   Вариант 3.

   Вася бьет по струнам 6-струнной гитары от 1 до 6 и обратно. Каждый следующий удар приходится на соседнюю струну. На струну с каким номером придется 2038-й удар? (Порядок удара струн: 1-2-3-4-5-6-5-4-3-2-1-2-...)

   Ответ. 4.

   Вариант 4.

   Вася бьет по струнам 6-струнной гитары от 1 до 6 и обратно. Каждый следующий удар приходится на соседнюю струну. На струну с каким номером придется 2057-й удар? (Порядок удара струн: 1-2-3-4-5-6-5-4-3-2-1-2-...)

   Ответ. 5.

   Вариант 5.

   Вася бьет по струнам 6-струнной гитары от 1 до 6 и обратно. Каждый следующий удар приходится на соседнюю струну. На струну с каким номером придется 2076-й удар? (Порядок удара струн: 1-2-3-4-5-6-5-4-3-2-1-2-...)

   Ответ. 6.

2. **Вариант 1.**

   Из города А в город Б идут туристы Витя и Паша с равными между собой скоростями, а из города Б в город А идут туристы Катя и Маша с равными между собой скоростями. Витя встретился с Машей в 12:00, Паша с Машей – в 15:00, Витя с Катей – в 14:00. Через сколько часов после полудня встретились Паша с Катей?

   Ответ. 5.

   Решение. Расстояние между Машей и Катей и их скорости не меняются, а скорости Вити и Паши равны. Витя встретил Катю через 2 часа после Маши, значит, Паша встретят Катю тоже через 2 часа после Маши, т.е. в 17:00 - через 5 часов после полудня.

   Вариант 2.

   Из города А в город Б идут туристы Витя и Паша с равными между собой скоростями, а из города Б в город А идут туристы Катя и Маша с равными между собой скоростями. Витя встретился с Машей в 11:00, Паша с Машей – в 15:00, Витя с Катей – в 14:00. Через сколько часов после полудня встретились Паша с Катей?

   Ответ. 6.

   Вариант 3.

   Из города А в город Б идут туристы Витя и Паша с равными между собой скоростями, а из города Б в город А идут туристы Катя и Маша с равными между собой скоростями. Витя встретился с Машей в 13:00, Паша с Машей – в 15:00, Витя с Катей – в 14:00. Через сколько часов после полудня встретились Паша с Катей?

   Ответ. 4.

   Вариант 4.

   Из города А в город Б идут туристы Витя и Паша с равными между собой скоростями, а из города Б в город А идут туристы Катя и Маша с равными между собой скоростями. Витя встретился с Машей в 12:00, Паша с Машей – в 16:00, Витя с Катей – в 14:00. Через сколько часов после полудня встретились Паша с Катей?

   Ответ. 6.

   Вариант 5.

   Из города А в город Б идут туристы Витя и Паша с равными между собой скоростями, а из города Б в город А идут туристы Катя и Маша с равными между собой скоростями. Витя встретился с Машей в 12:00, Паша с Машей – в 16:00, Витя с Катей – в 15:00. Через сколько часов после полудня встретились Паша с Катей?

   Ответ. 7.

3. **Вариант 1.** Три золотодобытчика — Вася, Миша и Гриша — накопали по мешку золота (каждый себе). По пути домой они встретили старика Хоттабыча. Он предложил им на выбор:
   1. Увеличить на 40% добычу Васи и на 20% добычу Миши;
   2. Увеличить на 40% добычу Миши и на 20% добычу Гриши;
   3. Увеличить на 40% добычу Гриши и на 20% добычу Васи.
   Гриша, самый сообразительный из них, посчитал, что их суммарная добыча в каждом из случаев увеличится соответственно на 5, 10 и 9 кг. Какая была суммарная добыча друзей (в килограммах) до встречи с Хоттабычем?

   Ответ. 40.

   Решение. Обозначим добычу Васи, Миши и Гриши за x, y, z соответственно. Тогда, $0,4x + 0,2y = 5; 0,4y + 0,2z = 10; 0,4z + 0,2x = 9$. Сложив уравнения, получим $0,6(x + y + z) = 24$, откуда $x + y + z = 40$.

   Вариант 2. Три золотодобытчика — Вася, Миша и Гриша — накопали по мешку золота (каждый себе). По пути домой они встретили старика Хоттабыча. Он предложил им на выбор:

1. Увеличить на 40% добычу Васи и на 20% добычу Миши;
2. Увеличить на 40% добычу Миши и на 20% добычу Гриши;
3. Увеличить на 40% добычу Гриши и на 20% добычу Васи.

Гриша, самый сообразительный из них, посчитал, что их суммарная добыча в каждом из случаев увеличится соответственно на 10, 20 и 18 кг. Какая была суммарная добыча друзей (в килограммах) до встречи с Хоттабычем?

Ответ. 80.

Вариант 3. Три золотодобытчика — Вася, Миша и Гриша — накопали по мешку золота (каждый себе). По пути домой они встретили старика Хоттабыча. Он предложил им на выбор:
1. Увеличить на 40% добычу Васи и на 20% добычу Миши;
2. Увеличить на 40% добычу Миши и на 20% добычу Гриши;
3. Увеличить на 40% добычу Гриши и на 20% добычу Васи.

Гриша, самый сообразительный из них, посчитал, что их суммарная добыча в каждом из случаев увеличится соответственно на 15, 30 и 27 кг. Какая была суммарная добыча друзей (в килограммах) до встречи с Хоттабычем?

Ответ. 120.

Вариант 4. Три золотодобытчика — Вася, Миша и Гриша — накопали по мешку золота (каждый себе). По пути домой они встретили старика Хоттабыча. Он предложил им на выбор:
1. Увеличить на 40% добычу Васи и на 20% добычу Миши;
2. Увеличить на 40% добычу Миши и на 20% добычу Гриши;
3. Увеличить на 40% добычу Гриши и на 20% добычу Васи.

Гриша, самый сообразительный из них, посчитал, что их суммарная добыча в каждом из случаев увеличится соответственно на 20, 40 и 36 кг. Какая была суммарная добыча друзей (в килограммах) до встречи с Хоттабычем?

Ответ. 160.

Вариант 5. Три золотодобытчика — Вася, Миша и Гриша — накопали по мешку золота (каждый себе). По пути домой они встретили старика Хоттабыча. Он предложил им на выбор:
1. Увеличить на 40% добычу Васи и на 20% добычу Миши;
2. Увеличить на 40% добычу Миши и на 20% добычу Гриши;
3. Увеличить на 40% добычу Гриши и на 20% добычу Васи.

Гриша, самый сообразительный из них, посчитал, что их суммарная добыча в каждом из случаев увеличится соответственно на 25, 50 и 45 кг. Какая была суммарная добыча друзей (в килограммах) до встречи с Хоттабычем?

Ответ. 200.

4. **Вариант 1**

Если из дискриминанта трехчлена $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ вычесть дискриминант трехчлена $g(x) = (a+1)x^2 + 2(b+2)x + c + 4$, то получится 24. Найдите $f(-2)$.

Ответ. 6.

Решение. Имеем: $D_1 - D_2 = 4(b^2 - ac - (b+2)^2 + (a+1)(c+4)) = 4(-4b + 4a + c) = 4f(-2)$.

Вариант 2

Если из дискриминанта трехчлена $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ вычесть дискриминант трехчлена $g(x) = (a+1)x^2 + 2(b+2)x + c + 4$, то получится 28. Найдите $f(-2)$.

Ответ. 7.

Вариант 3

Если из дискриминанта трехчлена $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ вычесть дискриминант трехчлена $g(x) = (a+1)x^2 + 2(b+3)x + c + 9$, то получится 16. Найдите $f(-3)$.

Ответ. 4.

Вариант 4

Если из дискриминанта трехчлена $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ вычесть дискриминант трехчлена $g(x) = (a+1)x^2 + 2(b-3)x + c + 9$, то получится 20. Найдите $f(3)$.

Ответ. 5.

Вариант 5

Если из дискриминанта трехчлена $f(x) = ax^2 + 2bx + c$ вычесть дискриминант трехчлена $g(x) = (a+1)x^2 + 2(b+4)x + c + 16$, то получится 8. Найдите $f(-4)$.

Ответ. 2.

5. **Вариант 1** Петя написал на доске 9 различных целых положительных чисел. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 16. Какое наибольшее значение может принимать самое большое из чисел на доске?

   Ответ. 108.

   Решение. Сумма данных чисел равна $9 \cdot 16 = 144$. Так как все числа различны, то сумма 8 наименьших из них не меньше, чем $1 + 2 + \cdots + 8 = 36$. Следовательно, наибольшее число не может быть больше чем $144 - 36 = 108$. Это возможно: $(1 + 2 + \cdots + 8 + 108) : 9 = 16$.

   Вариант 2 Петя написал на доске 9 различных целых положительных чисел. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 17. Какое наибольшее значение может принимать самое большое из чисел на доске?

   Ответ. 117.

   Вариант 3 Петя написал на доске 9 различных целых положительных чисел. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 18. Какое наибольшее значение может принимать самое большое из чисел на доске?

   Ответ. 126.

   Вариант 4 Петя написал на доске 9 различных целых положительных чисел. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 19. Какое наибольшее значение может принимать самое большое из чисел на доске?

   Ответ. 135.

   Вариант 5 Петя написал на доске 9 различных целых положительных чисел. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 20. Какое наибольшее значение может принимать самое большое из чисел на доске?

   Ответ. 144.

6. **Вариант 1.**

   Вася вырезал из картона треугольник и пронумеровал его вершины цифрами 1, 2 и 3. Оказалось, что если Васин треугольник повернуть 15 раз по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 1 на угол, равный углу при этой вершине, то треугольник вернется в исходное положение. Если Васин треугольник повернуть 6 раз по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 2 на угол, равный углу при этой вершине, то треугольник вернется в исходное положение. Вася утверждает, что если повернуть его треугольник n раз вокруг вершины под номером 3 на угол, равный углу при этой вершине, то треугольник вернется в исходное положение. Какое минимальное n мог назвать Вася так, чтобы его утверждение было правдивым хотя бы при каком-то картонном треугольнике?

   Ответ. 5.

   Решение. Пусть угол при первой вершине равен α, при второй β при третьей γ. При поворотах вокруг вершин Васин треугольник прежде чем вернуться в стартовое положение мог сделать несколько полных оборотов. Пусть при вращении вокруг первой вершины он сделал k полных оборотов, при вращении вокруг второй - m полных оборотов, вокруг третьей – l. Тогда из условия

задачи следует, что $15\alpha = 360k$, $6\beta = 360m$ и $n\gamma = 360l$. Из первых двух уравнений находим, что $\alpha = 24k$, $\beta = 60m$, значит $\alpha \geq 24$, $\beta \geq 60$. Заметим что $n \geq 4$, так как иначе $\gamma > 120$, что в сумме с β больше 180. $n \neq 4$, поскольку иначе $\gamma = 90$, значит $\alpha + \beta = 90$, чего быть не могло в силу $\alpha = 24k$, $\beta = 60m$.
$n = 5$ подходит: возьмем треугольник с углами $\alpha = 48, \beta = 60, \gamma = 72$.

Вариант 2.

Вася вырезал из картона треугольник и пронумеровал его вершины цифрами 1, 2 и 3. Оказалось, что если Васин треугольник повернуть 15 раз по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 1 на угол, равный углу при этой вершине, то треугольник вернется в исходное положение. Если Васин треугольник повернуть 5 раз по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 2 на угол, равный углу при этой вершине, то треугольник вернется в исходное положение. Вася утверждает, что если повернуть его треугольник n раз вокруг вершины под номером 3 на угол, равный углу при этой вершине, то треугольник вернется в исходное положение. Какое минимальное n мог назвать Вася так, чтобы его утверждение было правдивым хотя бы при каком-то картонном треугольнике?

Ответ. 6.

Вариант 3.

Вася вырезал из картона треугольник и пронумеровал его вершины цифрами 1, 2 и 3. Оказалось, что если Васин треугольник повернуть 9 раз по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 1 на угол, равный углу при этой вершине, то треугольник вернется в исходное положение. Если Васин треугольник повернуть 36 раз по часовой стрелке вокруг его вершины под номером 2 на угол, равный углу при этой вершине, то треугольник вернется в исходное положение. Вася утверждает, что если повернуть его треугольник n раз вокруг вершины под номером 3 на угол, равный углу при этой вершине, то треугольник вернется в исходное положение. Какое минимальное n мог назвать Вася так, чтобы его утверждение было правдивым хотя бы при каком-то картонном треугольнике?

Ответ. 3.

Вариант 4.

Петя любит все такие треугольники ABC, которые после 15 поворотов по часовой стрелке вокруг вершины A на угол, равный углу при этой вершине, возвращаются в исходное положение. Вася любит все такие треугольники ABC, которые после 6 поворотов по часовой стрелке вокруг вершины B на угол, равный углу при этой вершине возвращаются в исходное положение. Коля выбирает треугольник ABC среди любимых и Петей, и Васей так, чтобы за минимальное число поворотов вокруг вершины C на угол, равный углу при этой вершине, треугольник вернулся бы в исходное положение. Найдите значение угла ACB треугольника, выбранного Колей.

Ответ. 72.

Вариант 5.

Петя любит все такие треугольники ABC, которые после 15 поворотов по часовой стрелке вокруг вершины A на угол, равный углу при этой вершине, возвращаются в исходное положение. Вася любит все такие треугольники ABC, которые после 5 поворотов по часовой стрелке вокруг вершины B на угол, равный углу при этой вершине, возвращается в исходное положение. Коля выбирает треугольник ABC среди любимых и Петей, и Васей так, чтобы за минимальное число поворотов вокруг вершины C на угол, равный углу при этой вершине, треугольник вернулся бы в исходное положение. Найдите значение угла ACB треугольника, выбранного Колей.

Ответ. 60.

7. **Вариант 1.**

Из единичных кубиков собрали большой параллелепипед со сторонами большими 3. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 6 соседей, равно 429. Найдите количество кубиков, у которых ровно 4 соседа.

Ответ. 108.

Решение. Пусть a, b и c – длины сторон большого параллелепипеда. Тогда, кубиков ровно с 6 соседями: $(a-2)(b-2)(c-2)$. Поскольку каждый из множителей $a-2$, $b-2$ и $c-2$ больше 1 и их произведение равно произведению трех простых чисел 3, 11 и 13 имеем, что эти числа и есть 3, 11 и 13 в некотором порядке. Количество кубиков, у которых ровно 4 соседа, равно $4(a-2+b-2+c-2)$ (поскольку каждый такой кубик примыкает ровно к одному ребру). Таким образом, получаем ответ: $4(3+11+13)=108$.

Вариант 2.

Из единичных кубиков собрали большой параллелепипед со сторонами большими 3. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 6 соседей, равно 483. Найдите количество кубиков, у которых ровно 4 соседа.

Ответ. 132.

Вариант 3.

Из единичных кубиков собрали большой параллелепипед со сторонами большими 3. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 6 соседей, равно 638. Найдите количество кубиков, у которых ровно 4 соседа.

Ответ. 168.

Вариант 4.

Из единичных кубиков собрали большой параллелепипед со сторонами большими 3. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 6 соседей, равно 651. Найдите количество кубиков, у которых ровно 4 соседа.

Ответ. 164.

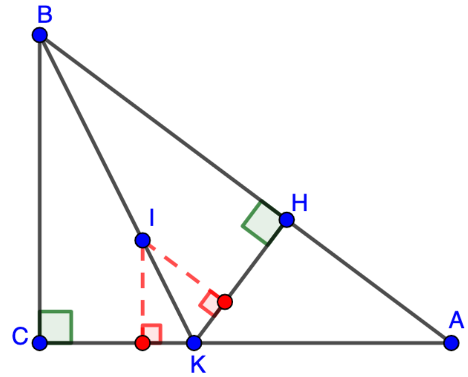
Вариант 5. Из единичных кубиков собрали большой параллелепипед со сторонами большими 3. Два кубика будем называть соседними, если они соприкасаются гранями. Таким образом, у одного кубика может быть до 6 соседей. Известно, что количество кубиков, у которых ровно 6 соседей, равно 682. Найдите количество кубиков, у которых ровно 4 соседа.

Ответ. 176.

8. **Вариант 1.** Точка I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами $BC=6$, $CA=8$, $AB=10$. Прямая BI пересекает сторону AC в точке K. Пусть KH – перпендикуляр, опущенный из точки K на сторону AB. Найдите расстояние от точки I до прямой KH.

   Ответ. 2.

   Решение.



По обратной теореме Пифагора угол C – прямой. Тогда, треугольники BKC и BKH равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, эти треугольники симметричны относительно прямой BK. Тогда, расстояние от I до KH равно расстоянию от I до CK, т.е. радиусу вписанной в треугольник ABC окружности. По формуле для прямоугольного треугольника, этот радиус равен $\frac{AC+CB-BA}{2} = 2$.

Вариант 2. Точка I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами $BC = 9$, $CA = 12$, $AB = 15$. Прямая BI пересекает сторону AC в точке K. Пусть KH – перпендикуляр, опущенный из точки K на сторону AB. Найдите расстояние от точки I до прямой KH.

Ответ. 3.

Вариант 3. Точка I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами $BC = 12$, $CA = 16$, $AB = 20$. Прямая BI пересекает сторону AC в точке K. Пусть KH – перпендикуляр, опущенный из точки K на сторону AB. Найдите расстояние от точки I до прямой KH.

Ответ. 4.

Вариант 4. Точка I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами $BC = 3$, $CA = 4$, $AB = 5$. Прямая BI пересекает сторону AC в точке K. Пусть KH – перпендикуляр, опущенный из точки K на сторону AB. Найдите расстояние от точки I до прямой KH.

Ответ. 1.

Вариант 5. Точка I – центр окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами $BC = 15$, $CA = 20$, $AB = 25$. Прямая BI пересекает сторону AC в точке K. Пусть KH – перпендикуляр, опущенный из точки K на сторону AB. Найдите расстояние от точки I до прямой KH.

Ответ. 5.