11 класс

Задача 11.1. Маша живёт в квартире №290, которая находится в 4-м подъезде 17-этажного дома. На каком этаже живёт Маша? (Количество квартир одинаково во всех подъездах дома на всех 17 этажах; номера квартир начинаются с 1.)

Ответ: 7.

Решение. Обозначим за x количество квартир на этаже, тогда в каждом подъезде $17x$ квартир. Таким образом, в первых трёх подъездах будет $51x$ квартир, а в первых четырёх — $68x$.

Если $x \geqslant 6$, то в первых трёх подъездах хотя бы 306 квартир, поэтому квартира №290 не может располагаться в четвёртом подъезде. А если $x \leqslant 4$, то в первых четырёх подъездах будет не больше 272 квартир, то есть снова квартира №290 не может располагаться в четвёртом подъезде. Остаётся единственный вариант, когда $x = 5$.

Тогда в первых трёх подъездах 255 квартир, а квартира №290 является 35-й в четвёртом подъезде, т. е. расположена на 7-м этаже. □

Задача 11.2. На столе лежат 30 монет: 23 десятирублёвых и 7 пятирублёвых, причём 20 из этих монет лежат вверх орлом, а остальные 10 — решкой. При каком наименьшем k среди произвольно выбранных k монет обязательно найдётся десятирублёвая монета, лежащая орлом вверх?

Ответ: 18.

Решение. Если выбрать 18 монет, то среди них окажется не более 10 лежащих решкой вверх, поэтому хотя бы 8 монет будут лежать орлом вверх. Среди этих монет не более 7 пятирублёвых, поэтому хотя бы одна будет десятирублёвой, она-то нам и подойдёт.

С другой стороны, если исходно на столе лежат 7 пятирублёвых монет орлом вверх, 10 десятирублёвых монет решкой вверх и 13 десятирублёвых монет орлом вверх, то среди 17 монет могут оказаться только монеты первых двух типов, поэтому 17 монет (или меньше) может не хватить. □

Задача 11.3. Произведение положительных чисел a и b равно 1. Известно, что

$$(3a + 2b)(3b + 2a) = 295.$$

Найдите $a + b$.

Ответ: 7.

Решение. Раскрыв скобки, получаем

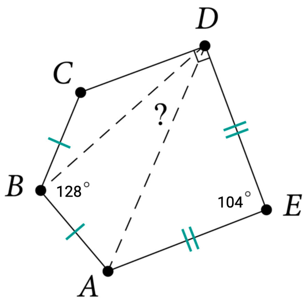
$$295 = 6a^2 + 6b^2 + 13ab = 6(a^2 + b^2) + 13,$$

откуда $a^2 + b^2 = 47$. Тогда

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 47 + 2 = 49 = 7^2,$$

что даёт $a + b = 7$ (отметим, что $a + b > 0$, поскольку $a > 0$ и $b > 0$).

Задача 11.4. Выпуклый пятиугольник $ABCDE$ таков, что $\angle ABC = 128^\circ$, $\angle CDE = 9$ ° 104°, $AB = BC$, $AE = ED$. Сколько градусов составляет угол ADB?



Ответ: 26.

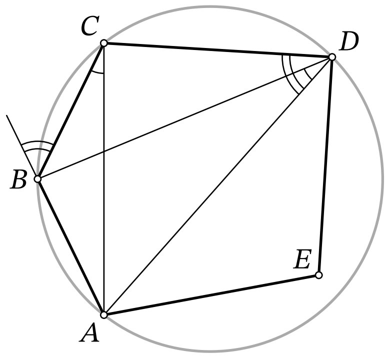


Рис. 14: к решению задачи 11.4

Решение. Углы при основании в равнобедренном треугольнике ABC равны по $\frac{1}{2}(180^\circ - 128^\circ) = 26^\circ$, а в равнобедренном треугольнике AED — по $\frac{1}{2}(180^\circ - 104^\circ) = 38^\circ$.

Заметим, что $\angle ADC = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$, и четырёхугольник $ABCD$ является вписанным (рис. 14), поскольку $\angle ABC + \angle ADC = 128^\circ + 52^\circ = 180^\circ$. Тогда $\angle ADB = \angle ACB = 26^\circ$. $\square$

Задача 11.5. При каком наименьшем натуральном n можно расставить числа от 1 до n по кругу так, чтобы каждое число было либо больше всех 40 следующих за ним по часовой стрелке, либо меньше всех 30 следующих за ним по часовой стрелке?

Ответ: 70.

Решение. Если $n \leqslant 39$, то для числа n условие выполняться не может: оно не может быть ни больше 40 следующих за ним чисел (ведь оно не больше самого себя), ни меньше 30 следующих за ним чисел (ведь оно наибольшее).

Если $40 \leqslant n \leqslant 69$, то для числа 40 условие выполняться не может: нет ни 40 чисел, меньших его, ни 30 чисел, бо́льших его.

Если же $n = 70$, то числа расставить получится. Для этого можно поставить их в следующем порядке по часовой стрелке: 1, 2, 3, …, 40, 70, 69, 68, …, 41 (рис. 15). Тогда числа от 1 до 40 окажутся меньше следующих 30 за ними, а числа от 70 до 41 — больше следующих 40 за ними. □

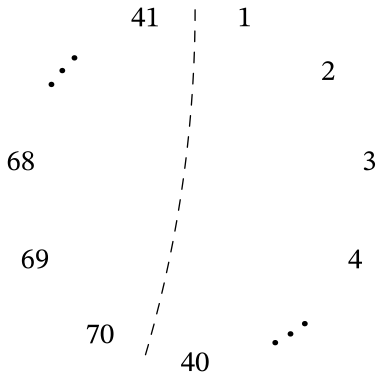


Рис. 15: к решению задачи 11.5

Задача 11.6. У многочлена $P(x)$ все коэффициенты — целые неотрицательные числа. Известно, что $P(1) = 4$ и $P(5) = 152$. Чему равно $P(11)$?

Ответ: 1454.

Решение. Предположим, степень многочлена P не меньше 4, тогда его старший коэффициент не меньше 1. Поскольку все остальные коэффициенты $P(x)$ неотрицательны, то $P(5) \geqslant 5^4 = 625$, что противоречит условию $P(5) = 152$.

Следовательно, степень многочлена P не больше 3, и $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ для некоторых целых неотрицательных a, b, c, d. Тогда

$$a + b + c + d = P(1) = 4, \qquad 125a + 25b + 5c + d = P(5) = 152.$$

Предположим, $a \geqslant 2$. Тогда $P(5) \geqslant 125 \cdot 2 = 250 > 152$, противоречие.

Предположим, $a = 0$. Тогда $P(5) = 25b + 5c + d \leqslant 25(b + c + d) = 25 \cdot 4 < 152$, противоречие.

Значит, $a = 1$. Тогда
$$b + c + d = 3, \qquad 25b + 5c + d = 27.$$

Предположим, $b \geqslant 2$. Тогда $25b + 5c + d \geqslant 25 \cdot 2 = 50 > 27$, противоречие.

Предположим, $b = 0$. Тогда $27 = 5c + d \leqslant 5(c + d) = 5 \cdot 3 < 27$, противоречие.

Значит, $b = 1$. Тогда
$$c + d = 2, \qquad 5c + d = 2.$$

Отсюда уже легко следует, что $c = 0$ и $d = 2$, т. е. $P(x) = x^3 + x^2 + 2$. Следовательно, $P(11) = 11^3 + 11^2 + 2 = 1454$. □

Другое решение. Можно заметить, что $P(1) = 4$ — это в любом случае сумма коэффициентов многочлена $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, откуда каждый из них не превосходит 4. Тогда эти коэффициенты можно считать цифрами в пятеричной системе счисления, а значение многочлена в точке 5 — как раз число, записанное этими цифрами:
$$152 = P(5) = 5^n a_n + \ldots + 5a_1 + a_0.$$

Так как $152_{10} = 1102_5$, а представления чисел в пятеричной системе единственны, то $P(x) = 1x^3 + 1x^2 + 0x + 2$. □

Задача 11.7. Центры шести сфер радиуса 1 расположены в вершинах правильного шестиугольника со стороной 2. Эти сферы внутренним образом касаются большой сферы S с центром в центре шестиугольника. Сфера P касается шести сфер внешним образом и сферы S внутренним образом. Чему равен радиус сферы P?

Ответ: 1,5.

Решение. Обозначим центры первых шести сфер A, B, …, F (в порядке, в котором они образуют шестиугольник), а плоскость шестиугольника α; центр сферы S (т. е. центр шестиугольника) — O, а её радиус — r; центр сферы P — Z, а её искомый радиус — z.

Сначала найдём радиус сферы S. Для этого рассмотрим сечение конструкции плоскостью α (рис. 16а). Точка касания S со сферой с центром A — обозначим эту точку за A_1 — лежит на прямой OA. Так как $AA_1 = 1$ и $OA_1 = r$, то $OA = r - 1$. С другой стороны, из свойств правильного шестиугольника ясно, что треугольники AOB, BOC, …, FOA равносторонние, то есть $OA = AB = 2$. Получаем $r = 3$.

Теперь рассмотрим сферу P. Из её касаний с шестью сферами следует, что расстояния от Z до точек A, B, …, F равны по $1 + z$. Это означает, что Z находится на перпендикуляре к α, проходящем через O (действительно, из равенств расстояний следует, что точки Z и O лежат на серединных перпендикулярах к отрезкам AD и BE, откуда прямая ZO перпендикулярна прямым AD и BE, а значит, и плоскости, их содержащей). Этот перпендикуляр является линией центров сфер S и P, поэтому на нём же лежит их точка касания — обозначим её X. Заметим, что из внутреннего касания S и P следует $OZ = OX - XZ = 3 - z$.

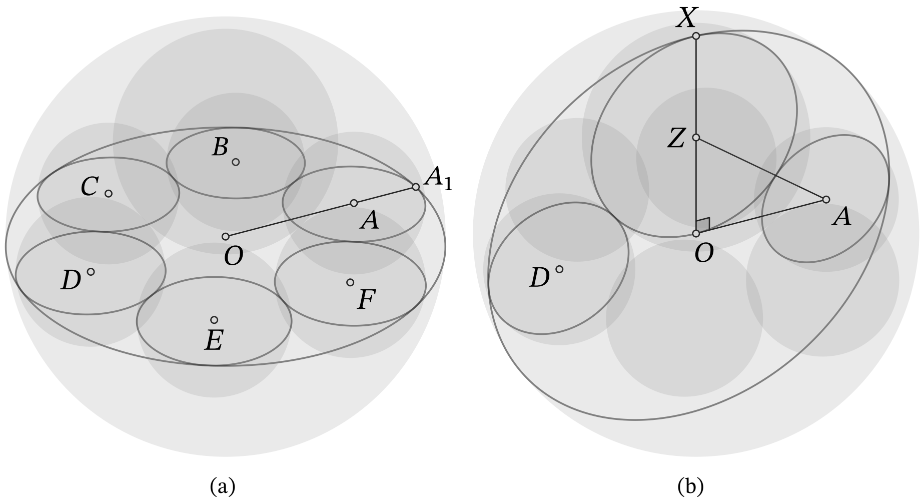


Рис. 16: к решению задачи 11.7

Рассмотрим треугольник AOZ (рис. 16b). Он прямоугольный, так как $OZ \perp \alpha$ и $\alpha \ni OA$. Мы знаем выражения всех его сторон через z; запишем теорему Пифагора:

$$\begin{gathered} ZA^2 = OA^2 + OZ^2 \quad \Rightarrow \\ (1+z)^2 = 2^2 + (3-z)^2 \quad \Rightarrow \\ 1 + 2z + z^2 = 4 + 9 - 6z + z^2 \quad \Rightarrow \\ 8z = 12. \end{gathered}$$

Отсюда $z = 1{,}5$. □

Задача 11.8. В таблице 28×35 некоторые k клеток покрашены в красный цвет, ещё r — в розовый, а оставшиеся s — в синий. Известно, что

- $k \geqslant r \geqslant s$;
- у каждой граничной клетки есть хотя бы 2 соседа такого же цвета;
- у каждой неграничной клетки есть хотя бы 3 соседа такого же цвета.

Какое наименьшее значение может принимать величина $k - s$?

(Клетка называется граничной, если она примыкает к границе таблицы. Соседями называются клетки, имеющие общую сторону.)

Ответ: 28.

Решение. Из условия легко понять, что у каждой клетки может быть не более одного соседа другого цвета.

Докажем, что раскраска таблицы должна быть «полосатой», то есть либо каждая строка, либо каждый столбец покрашены полностью в один цвет. Для этого достаточно показать, что либо все пары соседних клеток разного цвета являются соседями по горизонтали, либо все такие пары являются соседями по вертикали.

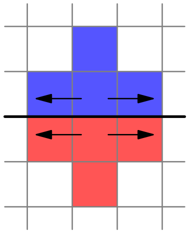


Рис. 17: к решению задачи 11.8

Рассмотрим любую пару соседних клеток разных цветов — если в таблице вообще есть клетки разных цветов, то такая найдётся. Остальные соседи этих клеток совпадают с ними по цвету, поэтому разделяющая цвета граница будет продолжаться в обе стороны (рис. 17), и далее, пока не упрётся в края таблицы.

Получаем, что любая граница между разными цветами должна идти от края до края таблицы, причём с каждой стороны от неё будет одноцветная полоса клеток. Но это означает, что вертикальная и горизонтальная границы одновременно существовать не могут. Следовательно, либо все границы горизонтальные, либо все границы вертикальные, и раскраска в любом случае «полосатая». (Ширина каждой полосы при этом должна быть не менее 2 клеток — впрочем, для решения это значения не имеет.)

Это означает, что либо количества клеток каждого цвета делятся на высоту таблицы, либо на её ширину, как и разность $k-s$. С другой стороны, эта разность не может быть равна 0, так как в этом случае $k = r = s$ и общее количество клеток равно $3k$, но на 3 число $28 \cdot 35$ не делится. Значит, $k - s \geqslant 28$ или $k - s \geqslant 35$.

Равенство $k - s = 28$ возможно, если красные клетки занимают 12 столбцов (по 28 клеток), розовые столько же, а синие — 11 столбцов. Если столбцы одного цвета расположить подряд, то все условия задачи будут выполнены. □