Всероссийская олимпиада школьников по математике
школьный этап 2022-2023
группа 1
Задания и решения

18 октября 2022 г.

5 класс

1. Вариант 1.

У Пети есть четыре карточки с цифрами 1, 2, 3, 4. Каждая цифра встречается ровно один раз. Сколько натуральных чисел, больших 2222, может составить из этих карточек Петя?

Ответ. 16.

Решение. Найдём сколько всего различных чисел можно составить из этих карточек: первую цифру можно выбрать 4 способами, приписать к ней вторую можно 3 способами, третью – 2 способам и последняя определяется однозначно. Т.е. всего 24 различных числа можно получить (есть возможность и явно убедиться в этом, выписав все подходящие числа). Найдём, сколько чисел из выписанных нам не подойдут. Это все числа с первой цифрой 1, их всего 6. И ещё 2 числа: 2134, 2143, так как если число начинается с 2, то вторая цифра может быть только 1. Тогда подходящих чисел $24 - 6 - 2 = 16$.

Вариант 2.

У Пети есть четыре карточки с цифрами 1, 2, 3, 4. Каждая цифра встречается ровно один раз. Сколько натуральных чисел, меньших 3222, может составить из этих карточек Петя?

Ответ. 15.

Вариант 3.

У Пети есть четыре карточки с цифрами 1, 2, 3, 4. Каждая цифра встречается ровно один раз. Сколько натуральных чисел, больших 2234, может составить из этих карточек Петя?

Ответ. 16.

Вариант 4.

У Пети есть четыре карточки с цифрами 1, 2, 3, 4. Каждая цифра встречается ровно один раз. Сколько натуральных чисел, меньших 3422, может составить из этих карточек Петя?

Ответ. 18.

2. Вариант 1.

На доске написаны девять целых чисел от 1 до 5. Известно, что семь из них не меньше 2, шесть – больше 2, три – не меньше 4, одно – не меньше 5. Найдите сумму всех чисел.

Ответ. 26.

Решение. Число, не меньшее 5, равно 5. Число 5 ровно одно. Три числа не меньше 4, поэтому ровно 2 числа равны 4. Шесть чисел больше 2, значит, все они не меньше 3. Поэтому ровно 3 числа равны 3. Семь чисел не меньше 2, поэтому одно число равно 2. Всего дано 9 чисел, следовательно, два числа равны 1. Сумма всех чисел равна $1+1+2+3+3+3+4+4+5=26$.

Вариант 2.

На доске написаны девять целых чисел от 2 до 6. Известно, что семь из них не меньше 3, шесть – больше 3, три – не меньше 5, одно – не меньше 6. Найдите сумму всех чисел.

Ответ. 35.

Вариант 3.

На доске написаны девять целых чисел от 3 до 7. Известно, что семь из них не меньше 4, шесть – больше 4, три – не меньше 6, одно – не меньше 7. Найдите сумму всех чисел.

Ответ. 44.

Вариант 4.

На доске написаны девять целых чисел от 4 до 8. Известно, что семь из них не меньше 5, шесть – больше 5, три – не меньше 7, одно – не меньше 8. Найдите сумму всех чисел.

Ответ. 53.

3. Вариант 1.

Кафе «Буратино» работает 6 дней в неделю с выходным по понедельникам. Коля сказал, что с 1 по 20 апреля кафе работало 17 дней, а с 10 по 30 – 18 дней. Известно, что один раз он ошибся. Какого числа был последний вторник апреля?

Ответ. 29

Решение: Так как с 10 по 30 апреля ровно 21 день, то каждый день недели в этот период был ровно по 3 раза. Значит, это утверждение не может быть ложным. Значит, ложно первое утверждение и с 1 по 20 апреля было только 2 понедельника (четыре быть не могло, так как нужно хотя бы 22 дня для этого). Такое могло быть только в том случае, если 1 апреля – это вторник. Значит, последний вторник апреля был 29 числа.

Вариант 2.

Кафе «Буратино» работает 6 дней в неделю с выходным по понедельникам. Коля сказал, что с 1 по 20 апреля кафе работало 17 дней, а с 10 по 30 – 18 дней. Известно, что один раз он ошибся. Какого числа был последний четверг апреля?

Ответ. 24

Вариант 3.

Кафе «Буратино» работает 6 дней в неделю с выходным по понедельникам. Коля сказал, что с 1 по 20 апреля кафе работало 17 дней, а с 10 по 30 – 18 дней. Известно, что один раз он ошибся.

Какого числа было последнее воскресенье апреля?

Ответ. 27

Вариант 4.

Кафе «Буратино» работает 6 дней в неделю с выходным по понедельникам. Коля сказал, что с 1 по 20 апреля кафе работало 17 дней, а с 10 по 30 – 18 дней. Известно, что один раз он ошибся. Какого числа была последняя пятница апреля?

Ответ. 25

4. Вариант 1.

Прямоугольник разрезали на три прямоугольника, два из которых имеют размеры 9 м $\times$ 12 м и 10 м $\times$ 15 м. Какую максимальную площадь мог иметь исходный прямоугольник? Ответ выразите в квадратных метрах.

Ответ: 330

Решение. Так как размеры двух прямоугольников фиксированы, то чтобы исходный прямоугольник имел наибольшую площадь, нужно чтобы наибольшую площадь имел третий прямоугольник. Так как у двух данных прямоугольников нет одинаковых сторон, то наибольшая площадь получится, если к большей стороне одного прямоугольника приложить меньшую сторону другого. Получится прямоугольник размером $12 \times (9 + 15)$ или прямоугольник размером $15 \times (10 + 12)$. Площадь первого равна 288, а второго – 330, следовательно, ответ – 330.

Вариант 2.

Прямоугольник разрезали на три прямоугольника, два из которых имеют размеры 8 м $\times$ 12 м и 10 м $\times$ 14 м. Какую максимальную площадь мог иметь исходный прямоугольник? Ответ выразите в квадратных метрах.

Ответ: 308

Вариант 3.

Прямоугольник разрезали на три прямоугольника, два из которых имеют размеры 8 м $\times$ 12 м и 10 м $\times$ 16 м. Какую максимальную площадь мог иметь исходный прямоугольник? Ответ выразите в квадратных метрах.

Ответ: 352

Вариант 4.

Прямоугольник разрезали на три прямоугольника, два из которых имеют размеры 9 м $\times$ 12 м и 10 м $\times$ 17 м. Какую максимальную площадь мог иметь исходный прямоугольник? Ответ выразите в квадратных метрах.

Ответ: 374

5. Вариант 1.

В примере на сложение, в котором цифры были написаны на карточках, перепутали местами две карточки, и получили неправильное выражение: $37541 + 43839 = 80280$. Найдите ошибку и запишите правильное значение суммы.

Ответ: 80380

Решение. Начнём проверять пример «справа налево». В разрядах единиц и десятков ошибок нет, а в разряде сотен появляется ошибка. Значит, одна из цифр этого разряда – 2, 8 или 5 – переставлена.
Рассмотрим следующие случаи:
1. Если переставлены две карточки «внутри» разряда сотен. Это могут быть 5 и 2 или 8 и 2. В обоих случаях ошибка остаётся
2. Одна из цифр разряда сотен переставлена с цифрой из более старшего разряда.
Чтобы восстановить равенство в разряде сотен, можно либо цифру 5 поменять на 4, но тогда равенство нарушится в разряде тысяч. Либо цифру 8 поменять на 7, но снова нарушится равенство в разряде тысяч. Либо цифру 2 поменять на цифру 3. В этом случае равенство выполнится, и это единственный возможный вариант.

Вариант 2.

В примере на сложение, в котором цифры были написаны на карточках, перепутали местами две карточки, и получили неправильный пример: $27641 + 43739 = 70280$. Найдите ошибку и запишите правильное значение суммы.

Ответ: 70380

Вариант 3.

В примере на сложение, в котором цифры были написаны на карточках, перепутали местами две карточки, и получили неправильное выражение: $27651 + 43739 = 70290$. Найдите ошибку и запишите правильное значение суммы.

Ответ: 70390

Вариант 4.

В примере на сложение, в котором цифры были написаны на карточках, перепутали местами две карточки, и получили неправильное выражение: $17651 + 43739 = 60290$. Найдите ошибку и запишите правильное значение суммы.

Ответ: 60390

6. Вариант 1.

Незнайка назвал четыре числа, а Пончик на шести карточках написал все их попарные суммы. Затем одну карточку он потерял, а на оставшихся были написаны числа 270, 360, 390, 500, 620. Какое число Пончик написал на потерянной карточке?

Ответ: 530.

Решение. Обозначим исходные числа $a \leq b \leq c \leq d$. Предположим, что потеряна карточка с максимальной суммой. Тогда это сумма чисел $c+d$. Значит, $a+b = 270$ и $a+b+c+d > 270+620 = 890$. С другой стороны, на всех карточках написана сумма чисел $3a+3b+2c+2d = 270+360+390+500+620 = 2140$. Получаем, что $2140 > 1780 + 2c + 2d$, отсюда $c + d < 180$. Противоречие. Аналогично можно доказать, что карточка с наименьшими числами не была потеряна. Получаем, что сумма всех чисел на карточках равна $270 + 620 = 890$. Все попарные суммы можно разбить на следующие группы: 1) $a+b, c+d$, 2) $a+c, b+d$, 3) $a+d, b+c$. Сумма чисел в каждой группе равна 890. Это возможно только в том случае, если у нас потеряна карточка, на которой написано число 890-360=530, так как 620 и 270, 390 и 500 образуют пары.

Вариант 2.

Незнайка назвал четыре числа, а Пончик на шести карточках написал все их попарные суммы. Затем одну карточку он потерял, а на оставшихся были написаны числа 270, 390, 500, 530, 620. Какое число Пончик написал на потерянной карточке?

Ответ: 360.

Вариант 3.

Незнайка назвал четыре числа, а Пончик на шести карточках написал все их попарные суммы. Затем одну карточку он потерял, а на оставшихся были написаны числа 270, 360, 390, 530, 620. Какое число Пончик написал на потерянной карточке?

Ответ: 500.

Вариант 4.

Незнайка назвал четыре числа, а Пончик на шести карточках написал все их попарные суммы. Затем одну карточку он потерял, а на оставшихся были написаны числа 270, 360, 500, 530, 620. Какое число Пончик написал на потерянной карточке?

Ответ: 390.

7. Вариант 1.

По кругу выписано 101 натуральное число. Известно, что среди любых 3 подряд идущих найдется хотя бы одно чётное число. Какое наименьшее количество чётных чисел может быть среди выписанных?

Ответ. 34.

Решение: Рассмотрим любые 3 подряд идущих числа. Среди них есть чётное. Зафиксируем это число и его соседа, а остальные 99 разобьём на 33 тройки подряд идущих. В каждой такой тройке будет не менее одного чётного числа. Таким образом, общее количество чётных чисел не менее $1 + 33 = 34$. Такая ситуация возможна. Пронумеруем числа по кругу. И чётными можно взять числа с номерами $1, 4, 7, \ldots, 100$.

Вариант 2.

По кругу выписано 104 натуральных числа. Известно, что среди любых 3 подряд идущих найдется хотя бы одно чётное число. Какое наименьшее количество чётных чисел может быть среди выписанных?

Ответ. 35.

Вариант 3.

По кругу выписано 107 натуральных чисел. Известно, что среди любых 3 подряд идущих найдется хотя бы одно чётное число. Какое наименьшее количество чётных чисел может быть среди выписанных?

Ответ. 36.

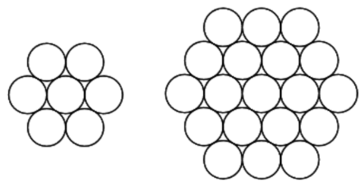
Вариант 4.

По кругу выписано 110 натуральных чисел. Известно, что среди любых 3 подряд идущих найдется хотя бы одно чётное число. Какое наименьшее количество чётных чисел может быть среди выписанных?

Ответ. 37.

8. Вариант 1.

Одинаковые монеты выложены на столе в форме шестиугольника. Если выложить их так, чтобы сторона шестиугольника состояла из 2 монет, то хватит 7 монет, а если сторона будет состоять из 3 монет, то всего потребуется 19 монет. Сколько нужно монет для построения шестиугольника со стороной из 10 монет?



Ответ: 271.

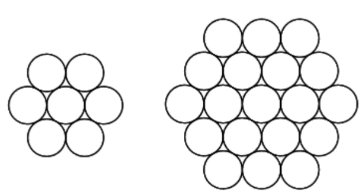
Решение.

1 способ.
Разобьём монеты на слои (контуры) от центра. Первый слой содержит 1 монету, второй слой – 6 и так далее. Заметим, что каждый новый слой содержит на 6 монет больше, чем предыдущий (если убрать монеты, лежащие в вершинах, то получим ровно столько монет, сколько было в предыдущем слое). Тогда общее кол-во монет можно вычислить по формуле $1+6+12+18+24+30+36+42+48+54=271$

2 способ.
Пусть сторона шестиугольника содержит n монет. Рассмотрим две противоположные стороны. Каждая из них состоит из n монет. К каждой из этих сторон примыкает ещё по 2 стороны. Но по одной монете с каждой стороны мы уже посчитали, поэтому на каждой из этих сторон остается по $n-1$ монете, при этом две монеты считаются дважды. Всего будет $2n+4(n-1)-2=6n-6$. Осталось заметить, что каждый новый слой монет строится вокруг уже существующего. Тогда всего будет: $19+(6\cdot4-6)+(6\cdot5-6)+(6\cdot6-6)+(6\cdot7-6)+(6\cdot8-6)+(6\cdot9-6)+(6\cdot10-6)=19+18+24+30+36+42+48+54=271$.

Вариант 2.

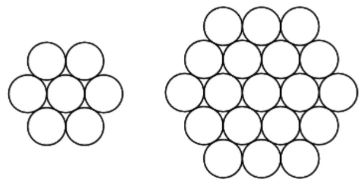
Одинаковые монеты выложены на столе в форме шестиугольника. Если выложить их так, чтобы сторона шестиугольника состояла из 2 монет, то хватит 7 монет, а если сторона будет состоять из 3 монет, то всего потребуется 19 монет. Сколько нужно монет для построения шестиугольника со стороной из 9 монет?



Ответ: 217.

Вариант 3.

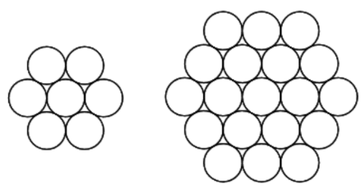
Одинаковые монеты выложены на столе в форме шестиугольника. Если выложить их так, чтобы сторона шестиугольника состояла из 2 монет, то хватит 7 монет, а если сторона будет состоять из 3 монет, то всего потребуется 19 монет. Сколько нужно монет для построения шестиугольника со стороной из 11 монет?



Ответ: 331.

Вариант 4.

Одинаковые монеты выложены на столе в форме шестиугольника. Если выложить их так, чтобы сторона шестиугольника состояла из 2 монет, то хватит 7 монет, а если сторона будет состоять из 3 монет, то всего потребуется 19 монет. Сколько нужно монет для построения шестиугольника со стороной из 12 монет?



Ответ: 397.