

Разбор заданий пригласительного этапа ВсОШ по математике для 5 класса

2021/22 учебный год

Максимальное количество баллов — 8

Критерии оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл за каждое задание

Задача № 1.

1.1. Условие:

Из спичек сложено 12 фигурок — 3 треугольника, 4 квадрата и 5 пятиугольников. У фигурок нет общих сторон. Петя и Вася по очереди забирают по одной спичке. Вася хочет, чтобы осталось как можно меньше нетронутых фигур, а Петя — чтобы таких фигур осталось как можно больше. Сколько фигурок останется после 10 ходов? Каждый из ребят делает по 5 ходов, первым начинает Петя.

Ответ: 6

Решение. Вася сможет забрать спички максимум из 5 разных фигур. Значит, если Петя будет забирать спички только из тех фигур, которые уже потеряли хотя бы одну спичку, то нетронутыми останутся $12 - 5 = 7$ фигур. Петя может выполнить условие, так как в противном случае Вася забирал бы спичку из уже частично разобранных фигур. Но при этом в самом начале Пете придётся взять спичку из нетронутой фигуры.

Заметим, что в каждой фигуре есть хотя бы три спички, значит, Петя всегда сможет сделать свой ход, а так как фигур 12, то и Вася сможет делать свои ходы. Получается, что ребята смогут придерживаться своих стратегий.

1.2. Условие:

Из спичек сложено 9 фигурок — 4 треугольника, 2 квадрата и 3 пятиугольника. У фигурок нет общих сторон. Петя и Вася по очереди забирают по одной спичке. Вася хочет, чтобы осталось как можно меньше нетронутых фигур, а Петя — чтобы таких фигур осталось как можно больше. Сколько фигурок останется после 10 ходов? Каждый из ребят делает по 5 ходов, первым начинает Петя.

Ответ: 3

1.3. Условие:

Из спичек сложено 15 фигурок — 4 квадрата, 5 пятиугольников и 6 шестиугольников. У фигурок нет общих сторон. Петя и Вася по очереди забирают по одной спичке. Вася хочет, чтобы осталось как можно меньше нетронутых фигур, а Петя — чтобы таких фигур осталось как можно больше. Сколько фигурок останется после 10 ходов? Каждый из ребят делает по 5 ходов, первым начинает Петя.

Ответ: 9

1.4. Условие:

Из спичек сложено 11 фигурок — 2 квадрата, 3 пятиугольника и 6 шестиугольников. У фигурок нет общих сторон. Петя и Вася по очереди забирают по одной спичке. Вася хочет, чтобы осталось как можно меньше нетронутых фигур, а Петя — чтобы таких фигур осталось как можно больше. Сколько фигурок останется после 10 ходов? Каждый из ребят делает по 5 ходов, первым начинает Петя.

Ответ: 5

Задача № 2

2.1. Условие:

Андрей, Борис, Светлана и Лариса — четыре человека разного возраста, образующих две семейные пары. Известно, что самый старший — это муж Ларисы, а Андрей младше Светланы, но старше Ларисы. Выберите все верные утверждения:

Варианты ответов:

- Андрей старше Бориса и женат на Светлане
- Андрей старше своей жены Светланы
- Самая младшая из всех — Лариса, и она замужем за Борисом
- Светлана старше Ларисы, и её муж — Борис
- Лариса старше своего мужа Андрея
- Борис и Светлана не женаты

Решение.

Раз Андрей младше Светланы, то он не может быть самым старшим. Раз самый старший — муж Ларисы, то это может быть только Борис. Значит, Андрей женат на Светлане. В порядке от младшего к старшему они выстроятся следующим образом: Лариса, Андрей, Светлана, Борис

2.2. Условие:

Роман, Олег, Екатерина и Жанна — четыре человека разного возраста, образующих две семейные пары. Известно, что каждый муж старше своей жены, а Жанна старше Олега. Выберите все верные утверждения:

Варианты ответов:

- Роман старше Олега и женат на Екатерине
- Роман младше Олега
- Олег старше своей жены Екатерины
- Самый старший из всех — Роман, и он женат на Жанне
- Жанна младше Екатерины
- Олег старше Жанны

Решение.

Раз Жанна старше Олега, и каждый муж старше своей жены, то Жанна замужем за Романом, а Олег женат на Екатерине. В порядке от младшего к старшему они выстроятся следующим образом: Екатерина, Олег, Жанна, Роман.

2.3. Условие:

Константин, Игорь, Ольга и Елена — четыре человека разного возраста, образующих две семейные пары. Известно, что самый младший — это муж Елены, а Константин старше Ольги, но младше Елены. Выберите все верные утверждения:

Варианты ответов:

- Константин старше Игоря и женат на Ольге
- Константин старше своей жены Елены
- Самая старшая из всех — Елена, и она замужем за Игорем
- Елена старше Ольги, и её муж — Константин
- Ольга старше своего мужа Константин
- Все жёны старше своих мужей

2.4. Условие:

Александр, Михаил, Вера и Надя — четыре человека разного возраста, образующих две семейные пары. Известно, что самый старший — это муж Веры, а Надя старше Михаила, но младше Веры. Выберите все верные утверждения:

Варианты ответов:

- Александр старше Михаила и женат на Вере
- Вера замужем за Михаилом, при этом она младше Александра
- Самым младшим является Михаил, и он женат на Вере
- Каждая жена младше своего мужа
- Вера, жена Александра, старше всех
- Надя старше своего мужа Михаила

Задача № 3

3.1. Условие:

Данил взял белый кубик и пронумеровал его грани числами от 1 до 6, написав каждое ровно один раз. Оказалось, что сумма чисел на одной паре противоположных граней равна 11. Чему НЕ может равняться сумма чисел ни на одной из оставшихся пар противоположных граней?

Варианты ответов:

- 5
- 6
- 7
- 8
- 9
- 10

Решение.

Если сумма чисел на противоположных гранях равняется 11, то на самих гранях написаны числа 5 и 6. Оставшиеся числа можно разбить на пары тремя способами: (1, 2) и (3, 4); (1, 3) и (2, 4); (1, 4) и (2, 3), т. е. МОГУТ получиться суммы: 3, 7, 4, 6 и 5. Значит, НЕ могут получиться суммы 8, 9 и 10.

3.2. Условие:

Данил взял белый кубик и пронумеровал его грани числами от 1 до 6, написав каждое ровно один раз. Оказалось, что сумма чисел на одной паре противоположных граней равна 10. Чему НЕ может равняться сумма чисел ни на одной из оставшихся пар противоположных граней?

Варианты ответов:

- 6
- 7
- 8
- 9
- 10
- 11

3.3. Условие:

Данил взял белый кубик и пронумеровал его грани числами от 1 до 6, написав каждое ровно один раз. Оказалось, что сумма чисел на одной паре противоположных граней равна 3. Чему НЕ может равняться сумма чисел ни на одной из оставшихся пар противоположных граней?

Варианты ответов:

- 4
- 5
- 6
- 7
- 8
- 9

3.4. Условие:

Данил взял белый кубик и пронумеровал его грани числами от 1 до 6, написав каждое ровно один раз. Оказалось, что сумма чисел на одной паре противоположных граней равна 4. Чему НЕ может равняться сумма чисел ни на одной из оставшихся пар противоположных граней?

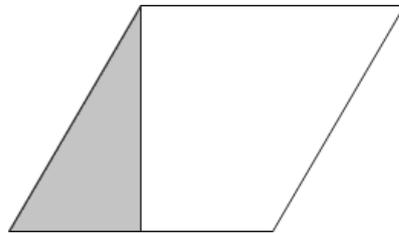
Варианты ответов:

- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8

Задача № 4

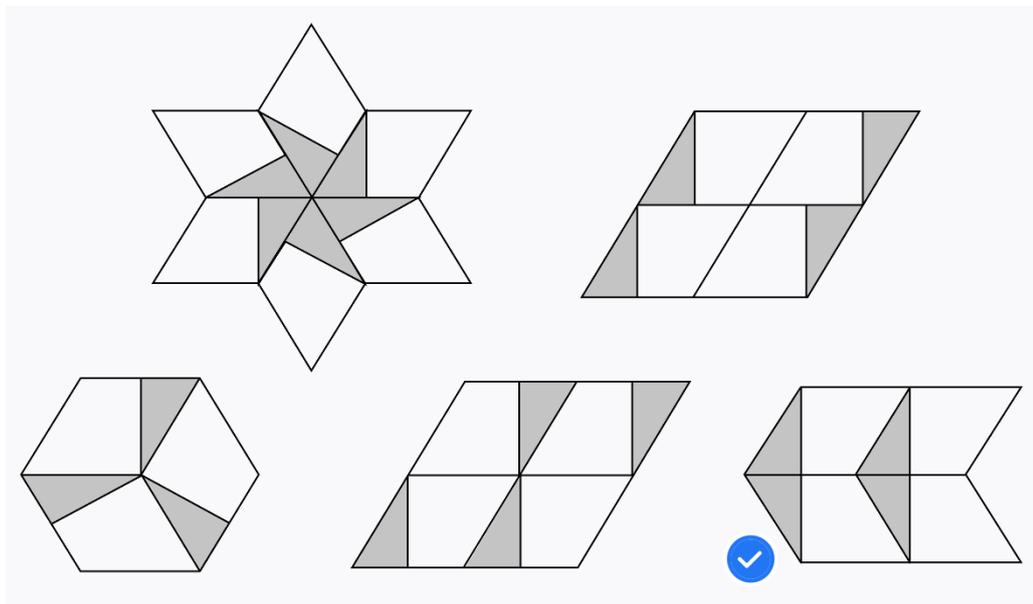
4.1. Условие:

У Пети есть очень много экземпляров фигурки, показанной на рисунке. Фигурка является ромбом, раскрашенным в белый и серый цвет.



Фигурки отпечатаны на одной стороне листа, поэтому их можно поворачивать, но не переворачивать. Какую из больших фигур Петя НЕ сможет сложить?

Ответ:



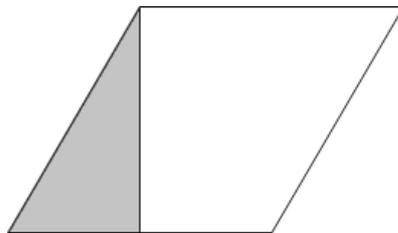
Решение.

Заметим, что

Петя не сможет сложить фигурку, в которой исходный ромбик перевёрнут, а не повёрнут.

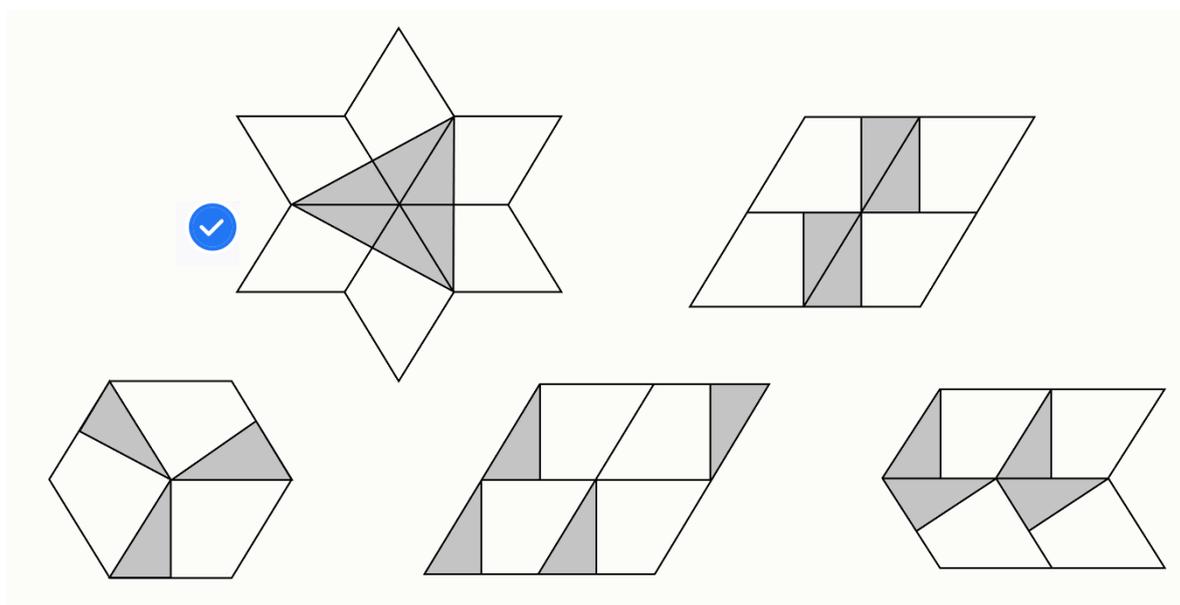
4.2. Условие:

У Пети есть очень много экземпляров фигурки, показанной на рисунке. Фигурка является ромбом, раскрашенным в белый и серый цвет.



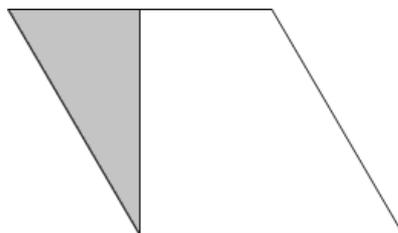
Фигурки отпечатаны на одной стороне листа, поэтому их можно поворачивать, но не переворачивать. Какую из больших фигур Петя НЕ сможет сложить?

Ответ:



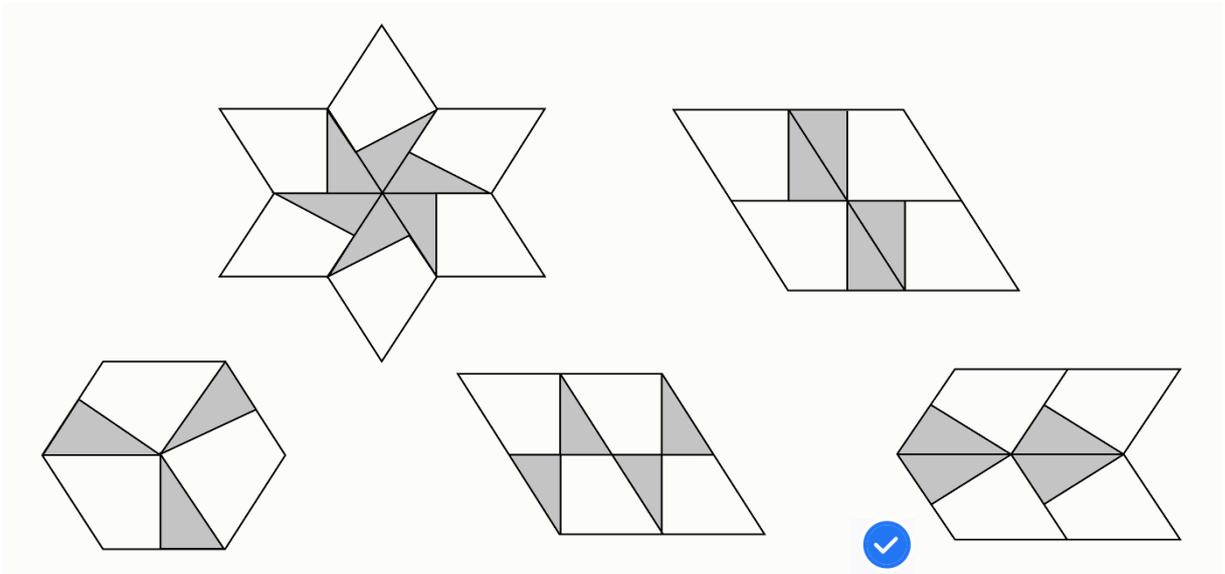
4.3. Условие:

У Пети есть очень много экземпляров фигурки, показанной на рисунке. Фигурка является ромбом, раскрашенным в белый и серый цвет.



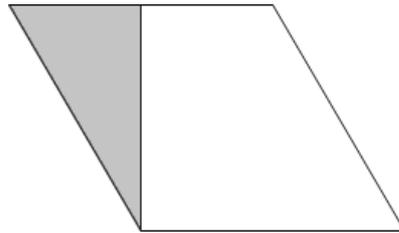
Фигурки отпечатаны на одной стороне листа, поэтому их можно поворачивать, но не переворачивать. Какую из больших фигур Петя НЕ сможет сложить?

Ответ:



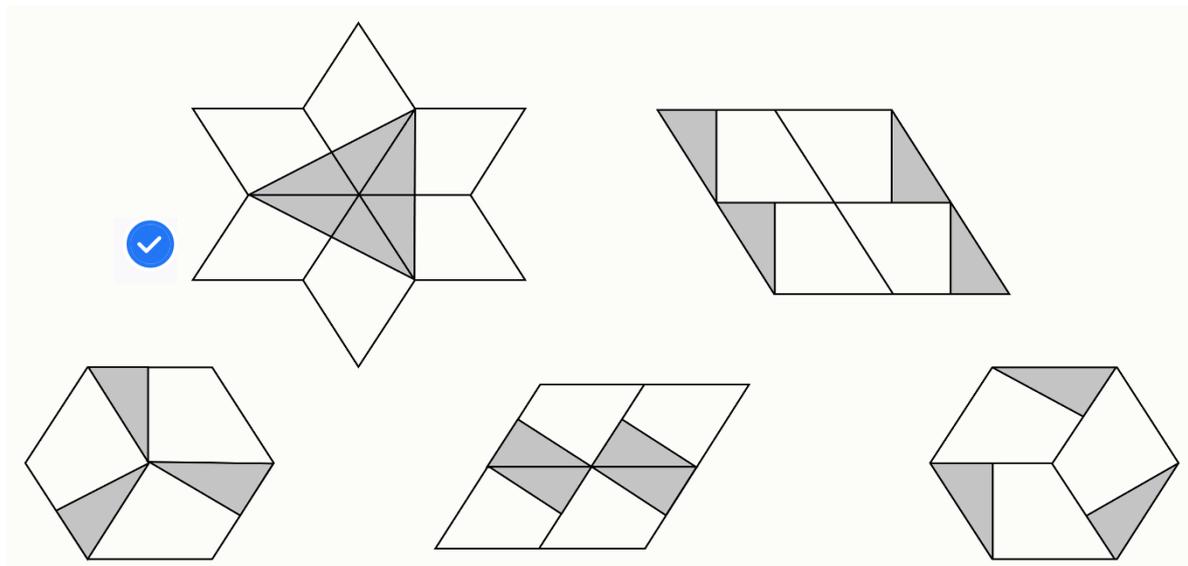
4.4. Условие:

У Пети есть очень много экземпляров фигурки, показанной на рисунке. Фигурка является ромбом, раскрашенным в белый и серый цвет.



Фигурки отпечатаны на одной стороне листа, поэтому их можно поворачивать, но не переворачивать. Какую из больших фигур Петя НЕ сможет сложить?

Ответ:



Задача № 5

5.1. Условие:

Полина пришла в буфет и увидела, что 2 слойки стоят в 3 раза дороже, чем 2 пирожка. Полине не хватило денег на 2 слойки, но хватило на 1 пирожок и 1 слойку. После покупки она задумалась, во сколько раз больше денег потратила, купив 1 слойку и 1 пирожок вместо 2 пирожков. Помогите Полине ответить на этот вопрос.

Ответ: 2

Решение.

2 слойки в 3 раза дороже, чем 2 пирожка, поэтому одна слойка в 3 раза дороже одного пирожка, то есть одна слойка стоит как 3 пирожка. Значит, 1 слойка и 1 пирожок стоят как 4 пирожка. Тогда они в 2 раза дороже, чем 2 пирожка.

5.2. Условие:

Полина пришла в буфет и увидела, что 2 слойки стоят в 5 раз дороже, чем 2 пирожка. Полине не хватило денег на 2 слойки, но хватило на 1 пирожок и 1 слойку. После покупки она задумалась, во сколько раз больше денег потратила, купив 1 слойку и 1 пирожок вместо 2 пирожков. Помогите Полине ответить на этот вопрос.

Ответ: 3

5.3. Условие:

Полина пришла в буфет и увидела, что 4 слойки стоят в 6 раз дороже, чем 4 пирожка. Полине не хватило денег на 3 слойки, но хватило на 2 пирожка и 1 слойку. После покупки она задумалась, во сколько раз больше денег потратила, купив 1 слойку и 2 пирожка вместо 2 пирожков. Помогите Полине ответить на этот вопрос.

Ответ: 4

5.4. Условие:

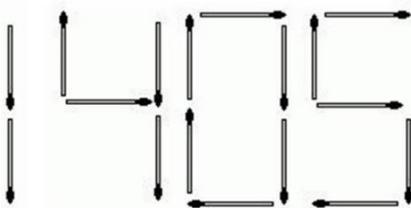
Полина пришла в буфет и увидела, что 5 слоек стоят в 7 раз дороже, чем 5 пирожков. Полине не хватило денег на 3 слойки, но хватило на 1 пирожок и 2 слойки. После покупки она задумалась, во сколько раз больше денег потратила, купив 2 слойки и 1 пирожок вместо 3 пирожков. Помогите Полине ответить на этот вопрос.

Ответ: 5

Задача № 6

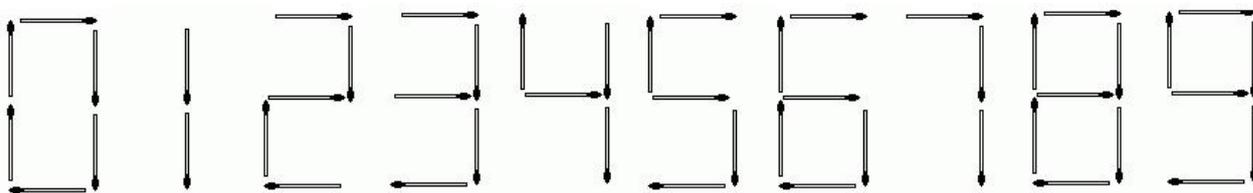
6.1. Условие:

Из спичек выложено число 1405.



Какое наибольшее четырёхзначное число можно получить из него, переложив не более двух спичек?

Образец написания цифр:



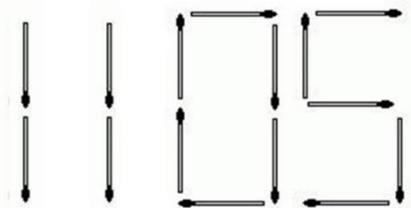
Ответ: 7705

Решение.

За два перекладывания из «1» нельзя получить больше «7», то есть наибольшее число должно начинаться с 7. Далее рассмотрим остальные цифры. Из «4» за не более чем два перекладывания можно получить цифры 9, 7, 5, 3 и 1. Для «9» нужно добавить две спички в «4», но тогда первая цифра останется единицей. Чтобы получить «7», можно убрать одну спичку из «4» и ещё одну передвинуть внутри «4». Итог: 7705. Заметим, что увеличить первые две цифры не удастся; также для получения двух семёрок мы уже переложили две спички, значит, больше получить не выйдет.

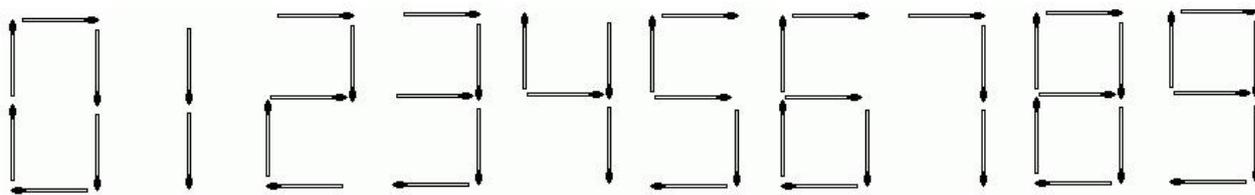
6.2. Условие:

Из спичек выложено число 1105.



Какое наибольшее четырёхзначное число можно получить из него, переложив не более двух спичек?

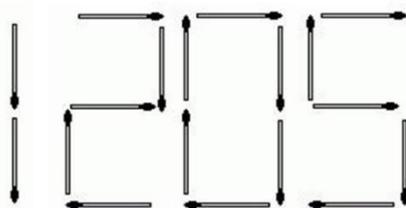
Образец написания цифр:



Ответ: 7155

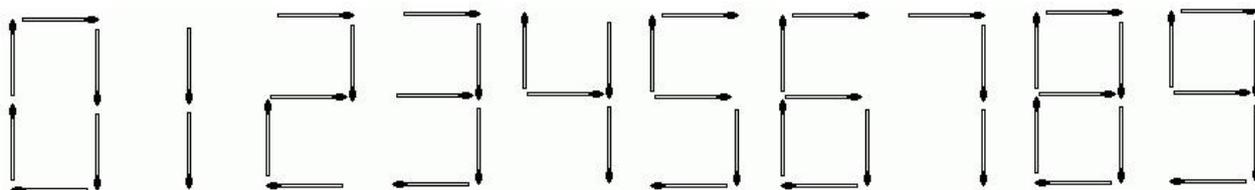
6.3. Условие:

Из спичек выложено число 1205.



Какое наибольшее четырёхзначное число можно получить из него, переложив не более двух спичек?

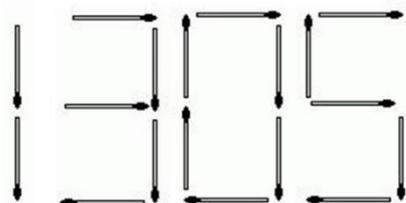
Образец написания цифр:



Ответ: 7255

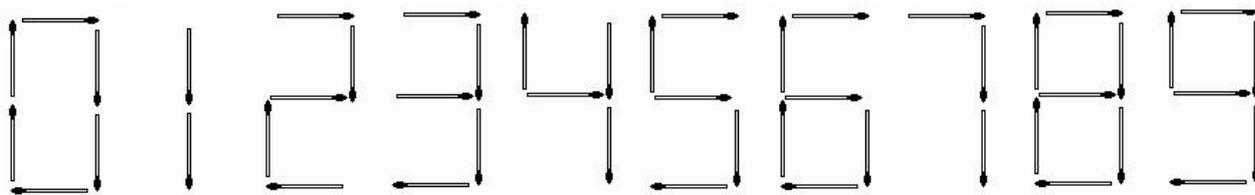
6.4. Условие:

Из спичек выложено число 1305.



Какое наибольшее четырёхзначное число можно получить из него, переложив не более двух спичек?

Образец написания цифр:



Ответ: 7785

Задача № 7

7.1. Условие:

На ёлке висит гирлянда из 100 лампочек. Известно, что первая и третья лампочки имеют жёлтый цвет. Кроме того, среди любых пяти подряд идущих лампочек ровно две жёлтого и ровно три синего цвета. Деду Морозу из-за ёлки видно не всю гирлянду. Помогите ему узнать, какого цвета и в каком порядке идут лампочки на 97, 98, 99 и 100 позициях.

Варианты для сопоставления:

97	Синий цвет
98	
99	Жёлтый цвет
100	

Ответ:

97; 99; 100 — Синий цвет

98 — Жёлтый цвет

Решение.

Рассмотрим пять первых лампочек. Из условия следует, что на 2, 4 и 5 позициях стоят синие лампочки. Заметим, что цвет шестой лампочки должен быть такой же, как и первой, поскольку для первых пяти лампочек и для лампочек со 2 по 6 должно выполняться условие задачи, а лампочки со 2 по 5 – общие для первой и шестой. Значит, если первая и шестая лампочки разных цветов, то для одной из пятерок условие не выполняется. Аналогично 2 и 7, 3 и 8, 4 и 9, 5 и 10 и т. д. (т. е. любые две лампочки, между которыми пять других) должны быть одинакового цвета. Получается, что первые пять лампочек горят теми же цветами, что и следующие пять. Тогда можно заметить, что пятёрки лампочек – с 1 по 5, с 6 по 10, с 11 по 15, ..., должны иметь такие же цвета, как и первая. Цвета первых пяти лампочек известны: жёлтый, синий, жёлтый, синий, синий. Значит, последние пять будут иметь следующие цвета: 96 – жёлтый, 97 – синий, 98 – жёлтый, 99 – синий, 100 – синий. Отсюда получаем ответ.

7.2. Условие:

На ёлке висит гирлянда из 100 лампочек. Известно, что вторая и четвёртая лампочки имеют жёлтый цвет. Кроме того, среди любых пяти подряд идущих лампочек ровно две жёлтого и ровно три синего цвета. Деду Морозу из-за ёлки видно не всю гирлянду.

Помогите ему узнать, какого цвета и в каком порядке идут лампочки на 97, 98, 99 и 100 позициях.

Варианты для сопоставления:

97	Синий цвет
98	
99	Жёлтый цвет
100	

Ответ:

98; 100 — Синий цвет

99; 97 — Жёлтый цвет

7.3. Условие:

На ёлке висит гирлянда из 100 лампочек. Известно, что первая и пятая лампочки имеют жёлтый цвет. Кроме того, среди любых пяти подряд идущих лампочек ровно две жёлтого и ровно три синего цвета. Деду Морозу из-за ёлки видно не всю гирлянду. Помогите ему узнать, какого цвета и в каком порядке идут лампочки на 97, 98, 99 и 100 позициях.

Варианты для сопоставления:

97	Синий цвет
98	
99	Жёлтый цвет
100	

Ответ:

97; 98; 99; — Синий цвет

100 — Жёлтый цвет

7.4. Условие:

На ёлке висит гирлянда из 100 лампочек. Известно, что третья и четвёртая лампочки имеют жёлтый цвет. Кроме того, среди любых пяти подряд идущих лампочек ровно две жёлтого и ровно три синего цвета. Деду Морозу из-за ёлки видно не всю гирлянду. Помогите ему узнать, какого цвета и в каком порядке идут лампочки на 97, 98, 99 и 100 позициях.

Варианты для сопоставления:

97	Синий цвет
98	
99	Жёлтый цвет
100	

Ответ:

97; 100 — Синий цвет

98; 99 — Жёлтый цвет

Задача № 8

8.1. Условие:

Пятизначное число называется горкой, если в нём первые три цифры идут в порядке возрастания, а последние три — в порядке убывания. Например, 13760 и 28932 — горки, а 78821 и 86521 — не горки. Сколько существует горок, которые больше числа 77777?

Ответ: 36

Решение.

Подходящие горки обязательно начинаются с 7, поэтому далее идёт либо 8, либо 9. Если вторую позицию займёт цифра 9, то третья цифра не будет больше второй, поэтому условию удовлетворяет только 8. Следовательно, на третьей позиции стоит 9. Последние два места могут занимать любые две различные цифры от 0 до 8. Таких пар цифр $9 \cdot 8 / 2 = 36$, так как сначала мы выбираем цифру на предпоследнем месте (от 0 до 8), а затем из оставшихся восьми цифр выбираем ту, что поставим в конец (от 0 до 8, исключая цифру на предпоследней позиции). Поскольку важен порядок цифр, получившееся количество способов поделим на два, так как цифры делятся на пары вида (a, b), (b, a). Например, сочетание цифр 2 и 7 может иметь вид 27 или 72 (именно в таком порядке), и в каждой такой паре нам подходит только один из способов – в котором цифры стоят в порядке убывания.

8.2. Условие:

Пятизначное число называется ямкой, если в нём первые три цифры идут в порядке убывания, а последние три — в порядке возрастания. Например, 73016 и 98346 — ямки, а 88012 и 56821 — не ямки. Сколько существует ямок, которые меньше числа 22222?

Ответ: 36

Решение.

Подходящие ямки обязательно начинаются с 2, поэтому далее идёт либо 1, либо 0. Если вторую позицию займёт цифра 1, то третья цифра не будет больше второй, поэтому условию удовлетворяет только 0. Следовательно, на третьей позиции стоит 0. Последние два места могут занимать любые две различные цифры от 1 до 9. Таких пар цифр $9 \cdot 8 / 2 = 36$, так как сначала мы выбираем цифру на предпоследнем месте (от 1

до 9), а затем из оставшихся восьми цифр выбираем ту, что поставим в конец (от 1 до 9, исключая цифру на предпоследней позиции). Поскольку важен порядок цифр, получившееся количество способов поделим на два, так как цифры делятся на пары вида (a, b) , (b, a) . Например, сочетание цифр 2 и 7 может иметь вид 27 или 72 (именно в таком порядке), и в каждой такой паре нам подходит только один из способов – в котором цифры стоят в порядке убывания.