Информатика, муниципальный этап

Теоретический тур.
Решения и указания по проверке.

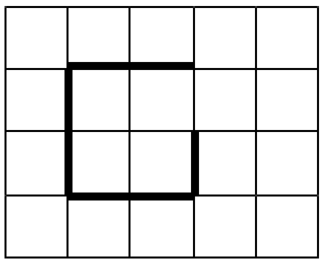
Оценка работы производится по *четырём* задачам, по которым получены лучшие результаты.

Максимальный балл по каждой задаче можно получить только за *обоснованный* и *эффективный* алгоритм.

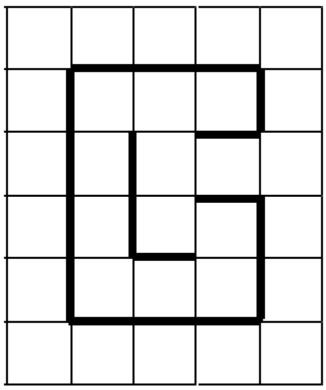
Задача 1. Робот (3 балла)

Робот живет на прямоугольном клетчатом поле и может выполнять команды: Л, П, В, Н, которые перемещают его на одну клетку влево, вправо, вверх и вниз соответственно. Других команд нет. Между клетками могут быть расположены стены. Если при выполнении команды на пути Робота стоит стена, то Робот ничего не делает. Напишите программу, выводящую Робота из лабиринта, если начальное положение Робота неизвестно.

а)



б)



<u>Решение и рекомендации по проверке:</u>

Для первого случая подойдет, например, решение «ВПП», для второго «ВВВППВЛВВНПП».

Решений в обоих случаях может быть много разных. Важно проверять, чтобы при любом начальном положении робот вышел из лабиринта.

*Любое верное решение первого случая оценивается в **1 балл**, любое верное решение второго случая оценивается в **2 балла**.*

Задача 2. Что делает алгоритм (3 балла)

program ABC;
var i,j,n:integer;
      X:array[1..10000] of integer;
begin
n:=10000;
for i:=2 to n do X[i]:=1;
for i:=2 to n do
   for j:=2 to n div i do
      X[i*j]:=X[i*j]+i;
end.
	алг ABC
	   арг n
	   рез целтаб X[1..10000]
	нач цел i,j
	нц для i от 2 до n
	  X[i]:=1
	кц
	нц для i от 2 до n
	   нц для j от 2 до div(n,i)
	        X[i*j]:=X[i*j]+i
	   кц
	кц
	кон

<u>Решение и рекомендации по проверке:</u>
Данный фрагмент программы считает сумму делителей всех чисел от 2 до N с помощью алгоритма, аналогичного «Решету Эратосфена» для поиска простых чисел. При этом 1 считается в сумме, а само число – не считается.

*За правильный ответ надо ставить **полный балл**, за верные частные случаи – **1 балл**.*

Задача 3. Гири (6 баллов)

В аптеке требуется взвешивать на чашечных весах лекарства весом 1 грамм, 2 грамма, …, 40 граммов. Какой минимальный набор гирь для этого потребуется? Ответ обоснуйте.

<u>Решение и рекомендации по проверке:</u>
Обоснованием того, что с помощью таких гирь можно взвесить все требуемые веса, может быть или таблица как это делать от 1 до 40 граммов, или рассуждение по индукции. Ключевая идея – что гири могут быть как на одной чаше весов с грузом, так и на разных. Обоснование минимальности может быть примерно таким – каждая гиря может во взвешивании использоваться тремя различными способами – не участвовать, быть на стороне с грузом или быть на противоположной стороне. Поэтому с помощью трех гирь можно получить не более 27 вариантов различных весов.
<u>Ответ</u>: 4 гири весом 1,3,9,27 граммов.

*За ответы с 6 гирями (могут быть варианты типа 1,2,2,5,10,20 или 1,2,4,8,16,32 или другие) вместе с правильным обоснованием возможности взвешивания ставить **2 балла**.*
*За присутствие ключевой идеи и примеры – **до 4 баллов**.*
*Еще **2 балла** стоит обоснование минимальности набора из 4 гирек.*

Задача 4. Найдите точку (6 баллов).

На плоскости нарисован квадрат и невидимыми чернилами поставлена точка. Разрешается выбирать какую-то прямую и спрашивать, лежит ли искомая точка на ней, левее или правее нее (выше или ниже).

За какое наименьшее число вопросов можно выяснить, лежит ли точка внутри данного квадрата, вне его или на границе.

<u>Решение и рекомендации по проверке:</u>

Например, для первого вопроса выбираем диагональ квадрата, а для двух следующих – две нужные стороны в зависимости от ответа на первый вопрос. Можно выбрать две диагонали, а затем одну нужную сторону. Обоснованием минимальности может быть соображение, что пересечение двух полуплоскостей всегда дает неограниченную область на плоскости.
<u>Ответ:</u> за 3 вопроса.

Правильное решение с 4 вопросами оценивать в ***2 балла****.*
За отсутствие доказательства минимальности ***снимать 1 балл****.*

Задача 5. Путь ладьи (6 баллов).

На шахматной доске расположены две фигуры – король и ладья, причем положение короля задано, а начальное положение ладьи можно определять самому. После этого требуется составить маршрут ладьи по полю, при котором она пройдет через все клетки доски кроме клетки, на которой расположен король. При этом ладье запрещено останавливаться и поворачивать на тех клетках, с которых она бьет короля.

Определите, при каком положении короля это возможно, и опишите алгоритм построения пути ладьи с указанными ограничениями.

<u>Решение и рекомендации по проверке:</u>

Если это так, то поставим ладью в угол a1, затем построим горизонтальные отрезки пути h1-h2-a2-a3-h3-…-h8. При этом мы пропустим одну горизонталь (ту, на которой стоит король), поэтому окончим горизонтальную часть пути не на a8, а на h8. Далее аналогичным образом поступим по вертикали – h1-g1-g8-f8-f1-…-a1, снова пропуская одну линию – вертикаль, на которой стоит король. Таким образом, ладья побывает на всех полях, кроме одного, где стоит король, а останавливается и поворачивает она только на краях доски, откуда не может бить короля. Если же король стоит на краю доски, например, на первой горизонтали, то при любом пути ладьи клетки первой горизонтали останутся не посещенными, потому что ладья и остановиться на них не может, и пройти мимо тоже.
<u>Ответ:</u> построение пути возможно тогда и только тогда, когда король находится не на краю доски.

За верный ответ можно ставить ***1 балл****.*
Аккуратное построение пути ладьи стоит ***3 балла****, обоснование невозможности решения, когда король стоит на краю доски –* ***2 балла****.*

Задача 6. Алфавитный порядок (8 баллов)

Петя выписал несколько слов из словаря племени Мумбо-Юмбо в том же порядке, как они следуют в словаре (лексикографический порядок). Опишите алгоритм, как по такому списку слов определить, в каком порядке следуют буквы в алфавите племени. Если возможны разные варианты алфавита, то должен быть указан один из них. Если данные противоречивы, алгоритм должен выдать соответствующее сообщение.

Решение и рекомендации по проверке:

Если слова расположены в лексикографическом порядке, то каждая пара соседних слов дает нам 0 или одно соотношение на порядок букв в алфавите. Никакой информации не дает пара слов Иванов – Иванова, а в случае, когда очередное слово не является началом следующего, первая пара несовпадающих букв дает информацию, какая буква в алфавите должна идти раньше. Таким образом, мы получим частичный порядок букв. Для превращения его в полный порядок существует алгоритм топологической сортировки. Кратко опишем одну из его разновидностей. Сначала выберем букву, которой ничего не предшествует в алфавите. Затем выпишем ее в начало алфавита, а ее саму и все исходящие из нее дуги сотрем. Затем процедуру повторим для оставшихся букв. Если на каком-то шаге букв, которым ничего не предшествует, окажется несколько, то они могут располагаться в любом порядке и ответ становится неоднозначным. Если на каком-то шаге буквы остались, но для каждой из них есть предшествующая, значит, в графе букв есть цикл и его нельзя отсортировать. Заметим, что данная разновидность сортировки на взгляд авторов, является достаточно понятной, но не наилучшей по трудоемкости. Лучшие реализации алгоритма топологической сортировки основаны на обходе графа в глубину.

*Неверные эвристические алгоритмы следует оценивать **до 1 балла**.*
*Упоминание топологической сортировки с неверными алгоритмами ее реализации оценивать **из 3 баллов**.*

Задача 7. Перемешивание карт (8 баллов).

При подготовке соревнований по спортивному бриджу судьям иногда приходится раскладывать перемешанную колоду карт по мастям. При этом за одно действие они могут вынуть из любого места колоды одну или несколько карт одинаковой масти, идущих подряд, и отложить их в стопочку, где собирают данную масть. Опишите алгоритм, помогающий судьям по известному расположению карт в колоде (последовательность цифр 1,2,3,4 длины 52, где каждая цифра встречается по 13 раз) определить, за какое минимальное количество действий можно разобрать колоду по мастям.

Решение и рекомендации по проверке:

Данная задача относится к динамическому программированию. Кратко опишем ее решение. Составим вспомогательную треугольную таблицу А, где записаны ответы для каждого куска последовательности. Она заполняется от главной диагонали к углу по удлинению кусков. Сначала на главной диагонали (куски длины 1) ставятся 1, затем на соседней с ней диагонали (куски длины 2) ставятся 1 (если масти соседних карт одинаковые) или 2. В общем случае, при заполнении клетки [I,j] мы пишем A[I,j]=A[i+1,j], если масти карт с номерами I и i+1 совпадают, A[I,j]=A[I,j-1], если масти карт с номерами j и j-1 совпадают. Легко показать, что если масти карт с номерами i и j совпадают, то A[I,j]=A[i+1,j]. В оставшихся случаях мы рассматриваем 4 варианта и выбираем из них наименьший в качестве A[I,j]. Первый и второй варианты – это A[i+1,j]+1 и A[I,j-1]+1. Еще два варианта, которые могут дать лучшие оценки, получаются так: ищем самый левый из элементов данного куска, совпадающий с J-м. Если его номер k, то смотрим на A[I,k-1]+A[k.j]. Аналогично для самого правого элемента куска, совпадающего с i-м.
После заполнения всей таблицы А выводим в качестве ответа число A[1,52].

*Эвристические или переборные алгоритмы следует оценивать **из 2 баллов**.*

Задача 8. Сети Петри (8 баллов).

Пусть на плоскости нарисовано два конечных множества объектов – позиции, рисуемые как кружочки, и переходы, рисуемые прямоугольниками. Позиции связаны с переходами дугами; направление дуг может быть как от позиции к переходу, так и наоборот. Такой ориентированный мультиграф называется сетью Петри. В позициях сети могут быть помещены неотрицательные целые числа – разметка m (маркировка). Если сеть Петри размечена, то она может, функционировать, т.е. менять своё состояние. Считаем, что состояние сети определено текущей разметкой. Правила изменения одного состояния (разметки) на другое следующие:

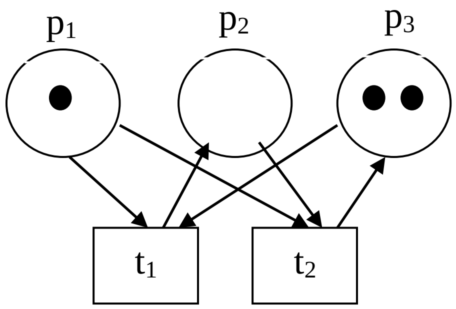
Для каждого перехода выделяем два вектора – вектор потребления $in(t)$ и вектор генерации $out(t)$. Вектор потребления $in(t)$ – набор чисел, равных количеству дуг, входящих в данный переход из соответствующих позиций. Вектор производства $out(t)$ соответствует количествам дуг, выходящих из t в соответствующие позиции.

Переход t называется «активным» при данной разметке, если $m \geq in(t)$ **(**покоординатно). Любой активный при данной разметке m переход может «сработать», т.е. состояние (разметка) сети может быть изменена на другую по правилу:

$$\overline{m} = m - in(t) + out(t)$$

Обозначение: $m \xrightarrow{t} \overline{m}$

Пример:

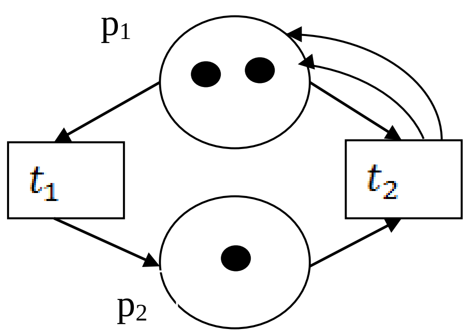


Разметка (p1,p2,p3) = $m = (1,0,2)$. При данной разметке m переход t_1 активен и $m \xrightarrow{t_1} (0,1,1)$, а переход t_1 – не активен, так как в p2 – нет фишек (ресурсов).

Разметка $\overline{m}$ называется достижимой из данной исходной разметки m, если $\exists$ последовательность допустимых срабатываний переходов $t_1, t_2 \dots t_k$ такая, что

$m \xrightarrow{t_1} m_1 \xrightarrow{t_2} m_2 \longrightarrow \dots \xrightarrow{t_k} \overline{m}$

Задача: Дана сеть



И разметка m = (p1, p2) = (2 ; 1).

1. Доказать, что множество разметок, достижимых из разметки m – конечно.

Приведите их список и способ достижения из начальной позиции.

2. Определите, какую одну дугу в исходной сети можно удалить, чтобы при этом множество достижимых из m разметок стало бесконечным.

<u>Решение и рекомендации по проверке:</u>

Каждый переход приведенной в задаче сети Петри имеет одинаковое количество входов и выходов, поэтому при срабатывании любого из них общая сумма чисел в пометках (общее количество фишек) не меняется. Поэтому возможны только 4 достижимые разметки (3;0), (2;1), (1;2), (0;3). Все они достижимы из начальной разметки. Так, при срабатывании второго перехода мы получим разметку (3,0), а после срабатывания первого перехода мы получим разметку (1;2). Из этой разметки при срабатывании первого перехода получается разметка (0;3).

При удалении из сети дуги, входящей во второй переход из первой позиции, мы получим сеть Петри, в которой после срабатывания сначала первого, а потом второго перехода, разметка (2;1) перейдет в разметку (3;1). Далее можно этот цикл повторять и получить неограниченное число разметок.

*Как первая, так и вторая части задачи оценивается **из 4 баллов**.*