# Разбор задачи «Шаттл до Рутнока»

Заметим, что можно добиться того, чтобы в шаттле не было нескольких пустых капсул подряд. Если после нескольких пустых капсул есть капсулы, занятые повстанцами, то можно сдвинуть этих повстанцев в капсулы с меньшими номерами. Если далее нет занятых капсул, то можно разместить в свободные капсулы еще как минимум одного повстанца.

Также можно добиться того, чтобы первая капсула была занята. Если она свободна, можно сдвинуть всех повстанцев на одну капсулу влево, и это не ухудшит ответ.

Два этих замечания позволяют написать простое линейное решение, которое пройдет группы тестов с первой по пятую. Поместим повстанца в первую капсулу, а дальше в цикле будем идти с шагом через одну капсулу и помещать повстанцев туда, пока не дойдем до капсулы $n$ или $n-1$.

Заметим, что каждая вторая капсула в нашем линейном решении оказывается свободной. Если $n$ четно, тогда и свободных, и занятых капсул будет по $\frac{n}{2}$. При нечетном $n$ мы получим $\frac{n+1}{2}$ занятых и $\frac{n-1}{2}$ свободных капсул. Запрограммировав эти формулы, можно пройти шестую и седьмую группы тестов соответственно.

В последней группе тестов число $n$ не помещается в 32-битный целый тип, поэтому для ее прохождения нужно использовать 64-битный целый тип.

# Разбор задачи «Нежданные гости»

Решение, моделирующее с шагом в одну секунду поведение объекта по описанному в условии алгоритму, проходило первые три группы тестов.

Для того чтобы пройти четвертую группу тестов, можно было на шагах 1 и 3 сдвигать объект сразу на $w$ квадратов и прибавлять к текущему времени $w$ секунд, до тех пор пока не будет превышено время $t$. Если на очередном шаге 1 и 3 время $t$ оказалось превышено, нужно откатить последний шаг и смоделировать последние секунды движения простой эмуляцией (как в первом решении). Такое решение работает за время $O(\frac{t}{w}+w)$.

Для полного балла нужно было реализовать решение, работающее за время $O(1)$. Заметим, что за $2w+2$ секунды объект проходит один полный цикл траектории, то есть все четыре шага описанного в условии алгоритма. Пусть $d = \lfloor \frac{t}{2w+2} \rfloor$, а $r = t \mod (2w+2)$. $d$ — количество полных циклов траектории движения объекта, за каждый цикл он сдвигался на два квадрата в сторону увеличения номеров столбцов, значит, после $d$ циклов он оказался в столбце с номером $2d$. После этого объекту осталось пройти еще $r$ секунд. Разберем два случая:

1. Если $0 \leqslant r \leqslant w$, то объект окажется в строке $r$ и столбце $2d$
2. Если $w+1 \leqslant r \leqslant 2w+1$, то объект окажется в строке $2w+1-r$ и столбце $2d+1$

# Разбор задачи «Башни из контейнеров»

В первой группе тестов исходная высота единственной башни равна 1, и понадобится $m-1$ контейнер, чтобы сделать ее высоту равной $m$. Во второй группе тестов $m \geqslant h_1$, поэтому понадобится $m-h_1$ контейнеров.

Посчитаем суммарное количество контейнеров в башнях: $S = h_1 + \cdots + h_n$. Если высота каждой башни не менее $m$, то в сумме в них не менее $nm$ контейнеров. Так как мы можем распределять контейнеры как угодно, то при $nm \leqslant S$ нам не нужны дополнительные контейнеры (ответ 0). Иначе ответ $= nm - S$.

Для прохождения последней группы тестов нужно учесть переполнение и воспользоваться 64-битным типом данных.

# Разбор задачи «Ящик Пандоры»

Наивное решение, которое для каждого $k_i$ проходит по массиву кнопок с шагом $k_i$ и меняет состояние каждой встреченной кнопки на противоположное, проходит первые четыре группы тестов.

Перейдем к полному решению задачи. Для начала заметим, что ответ не зависит от порядка $k_i$. Кроме того, если два ученых высказали предположения с одинаковым $k_i$, то применение этих предположений по очереди дважды меняет состояние некоторых кнопок, что равносильно тому, что состояние никаких кнопок не меняется. Тогда можно сгруппировать предположения с одинаковым значением $k_i$ — с помощью сортировки или структуры данных map / dictionary — оба способа работают за $O(n \cdot \log(n))$. После этого останется применить по одному разу лишь те предположения, которые были высказаны нечетное количество раз.

Теперь обработаем оставшиеся предположения $k_i$ наивным способом, описанным выше. Один проход по массиву кнопок совершит $\lfloor \frac{n}{k_i} \rfloor$ шагов. Поскольку все $k_i$ теперь различны, суммарное количество шагов такого алгоритма можно оценить сверху величиной $\sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$. Известный факт, что такая сумма имеет порядок $O(n \cdot \log(n))$ — вы можете найти его доказательство в Интернете в статьях про гармонический ряд. Такая оценка позволяет пройти последнюю группу тестов.

# Разбор задачи «Радйа и числа»

В первой и второй группе тестов можно посчитать ответ руками (он равен 6 и 46 соответственно).

Для третьей группы тестов можно заметить, что для всех значений $n$ от 1 до 9 сумма цифр чисел совпадает с суммой чисел, которую можно посчитать циклом или по формуле суммы арифметической прогрессии. А для $n = 10$ ответ уже найден во второй подзадаче.

Для прохождения четвертой группы тестов можно проэмулировать процесс: перебрать все числа от 1 до $n$ и для каждого из них посчитать сумму цифр (деля в цикле это число на 10 и суммируя остатки, пока число не станет равно нулю).

Решим пятую подзадачу. Рассмотрим числа от 0 до $10^k - 1$, дополненные ведущими нулями так, чтобы все эти числа состояли из $k$ разрядов (дополнение числа ведущими нулями не меняет его суммы цифр). Заметим, что в каждом из $k$ разрядов каждая из цифр встречается одинаковое число раз. Так как всего чисел у нас $10^k$, то каждая из цифр встречается в их записи $10^{k-1}$ раз. Тогда сумма цифр чисел от 0 до $10^k - 1$ равна $(0 + 1 + \cdots + 9) \cdot 10^{k-1} = 45 \cdot 10^{k-1}$. Нужно не забыть, что нас спрашивают сумму цифр чисел до $10^k$ включительно, и добавить к ответу единицу. Все вычисления нужно проводить по модулю $10^9 + 7$ и с использованием 64-битного целого типа (иначе при умножении на 10 будет происходить переполнение).

Обозначим за $s_i$ сумму чисел от 0 до $i$ (то есть $i \cdot (i + 1)/2$), а за $D_i$ — сумму цифр чисел от 0 до $10^i - 1$ (мы уже научились находить ее в пятой подзадаче). Пусть $n = \overline{x_1 x_2 x_3 \ldots x_k}$, где $x_1$ не равно 0. За $Sum_i$ обозначим сумму цифр в числах от $\overline{x_1 x_2 \ldots x_{i-1} 00 \ldots 0}$ (ровно $k - i + 1$ нулей) до $\overline{x_1 x_2 \ldots (x_i - 1) 99 \ldots 9}$ (ровно $k - i$ девяток). Заметим, что такая сумма равна $x_i \cdot D_{k-i} + x_i \cdot 10^{k-i} \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1}) + s_{x_i - 1} \cdot 10^{k-i}$. Действительно, у нас есть $x_i$ блоков чисел по $10^{k-i}$, сумма в каждом из которых равна $D_{k-i} + 10^{k-i} \cdot (x_1 + \ldots + x_{i-1}) + 10^{k-i} \cdot r$, где $0 \leqslant r \leqslant x_i - 1$. Нетрудно заметить, что сумма всех $Sum_i$ равна сумме цифр во всех числах. Осталось посчитать каждое из $Sum_i$ и взять их сумму, производя все вычисления по модулю $10^9 + 7$.

# Разбор задачи «Детский Вязаный Жилет»

Нужно было аккуратно реализовать все, что описано в условии.