Задача A. Кабельная продукция

Идея решения. Сначала посчитаем, сколько суммарно цифр в числах от 1 до n, кратных десяти. Переберём количество цифр в числе от 2 до длины числа n. Посчитаем cnt_k – сколько k-значных чисел принадлежат отрезку от 1 до n, k-значные числа лежат на отрезке $[10^{k-1}; 10^k-1]$. Если $n > 10^k$, то все они они не больше n, и $cnt_k = 9 \cdot 10^{k-1}$. В противном случае нас интересуют только числа на отрезке $[10^{k-1}; n]$, и $cnt_k = n+1-10^{k-1}$.

При $k>2$ среди k-значных чисел на десять делится каждое десятое число, начиная с наименьшего. Поэтому таких чисел $\lfloor cnt_k/10 \rfloor$, и суммарно в них $\lfloor cnt_k/10 \rfloor \cdot k$ цифр. Здесь $\lfloor x \rfloor$ означает округленное вниз число x.

К суммарному числу цифр в числах, кратных десяти, нужно добавить единицу – длину числа 1, и, если n не кратно десяти, длину числа n. Кроме того, нужно не забыть про случай $n = 1$ – тогда ответ равен 1.

Наконец, необходимо использовать 64-битный тип данных, причем как для подсчета ответа, так и для чтения из ввода значения x.

Задача B. Телевизионное шоу

Идея решения. Будем составлять искомый список чисел последовательно. Предположим, что мы уже сгенерировали n чисел, поймем, чему будет равно a_{n+1}. С одной стороны, $a_{n+1} > 2 \cdot a_n$. С другой стороны, a_{n+1} должно заканчиваться на x нулей, где x половина длины десятичной записи a_{n+1}, округленная вверх. Это условие равносильно тому, что a_{n+1} делится на 10^x.

Заметим, что длина числа $2 \cdot a_n$ не более, чем на один больше, чем длина числа a_n. Если длина не изменилась, или же длина изменилась с нечетного числа на четное, то, поскольку a_n делилось на 10^x, то и $2 \cdot a_n$ будет делиться на 10^x, и минимальным числом, подходящим под условие задачи, будет $a_{n+1}=2 \cdot a_n$.

В противном случае, необходимо увеличить число до того, пока оно не станет делиться на 10^x. С предыдущего шага мы знаем, что a_n делится на 10^{x-1}. Поэтому, для того, чтобы получить число, делящееся на 10^x, можно прибавлять 10^{x-1}, пока текущее число не делится на 10^x. Таких прибавлений будет не больше десяти. В конце мы получим число, которое больше, чем два предыдущих, и делится на 10^x. Таким образом, начиная с первого числа a_1=100, мы можем получить все нужные n чисел.

Задача C. Лягушонок Билли

Постановка задачи. Дано $\boldsymbol{n}$ точек на прямой. На каждом шаге одна из точек удаляется, оставшиеся точки смещаются на один от нее, совпадающие с ней не двигаются. Необходимо выбрать порядок удаления, при котором сумма координат удаляемых точек минимальна.

Идея решения. На каждом шаге нам выгодно убирать самую дальнюю точку. Почему?

- Каждая точка максимально сдвинется влево.
- Ни при каком другом порядке она не сможет сдвинуться больше.

На каждом шаге будем удалять группу самых правых точек. А также поддерживать величину, на которую сместились остальные точки. После удаления группы смещение увеличивается на размер группы. Продолжаем до тех пор, пока не кончатся точки. Надо не забыть про 64-битный тип данных.

Задача D. Половина

Постановка задачи. Дано $\boldsymbol{N}$ яблок. $\boldsymbol{K}$ раз Петя либо отдает половину от всех своих яблок, либо половину одного яблока. Петя не может делить яблоко более чем на две части. Найти, сколько яблок могло остаться у Пети.

Идея решения. Воспользуемся методом динамического программирования. Будем хранить ответы на вопросы «Может ли у Пети быть $\boldsymbol{X}$ яблок, после того, как он встретил $\boldsymbol{Y}$ друзей». Заметим, что $\boldsymbol{X}$ лучше хранить в «половинках» яблок, т. к. их количество всегда целое число.

Пусть у Пети может быть $\boldsymbol{X}$ «половинок» яблок после встречи $\boldsymbol{Y}$ друзей. В какие состояния можно перейти?

- Если у Пети есть хотя бы одна «половинка», он может ее отдать.
- Если у Пети четное число «половинок», то он может отдать половину от всех яблок.

Значит, из состояния динамики ($\boldsymbol{X}$; $\boldsymbol{Y}$), где $\boldsymbol{X}$ – количество яблок, $\boldsymbol{Y}$ – количество уже встреченных друзей, будут следующие переходы:

- Если $\boldsymbol{X > 0}$, тогда ($\boldsymbol{X-1}$; $\boldsymbol{Y+1}$).
- Если X делится на 2, тогда ($\frac{X}{2}$; $\boldsymbol{Y+1}$).

Сложность решение O(N·K).