Задача A. Реклама на заборе

Постановка задачи. Дано n отрезков на прямой – l_i, …, r_i. Нужно проверить покрытие отрезка 1..m заданными.

Идея решения. Сначала заведём массив размера m, в котором на i позиции будем хранить, покрыта ли i-ая координата. Далее перебираем все отрезки, делая соответствующие пометки в массиве. В конце проверяем, что каждая позиция покрыта.

Задача B. Лягушонок Билли

Постановка задачи. Дано n точек на прямой. На каждом шаге одна из точек удаляется, оставшиеся точки смещаются на один от нее, совпадающие с ней не двигаются. Необходимо выбрать порядок удаления, при котором сумма координат удаляемых точек минимальна.

Идея решения. На каждом шаге нам выгодно убирать самую дальнюю точку. Почему?

- Каждая точка максимально сдвинется влево.
- Ни при каком другом порядке она не сможет сдвинуться больше.

На каждом шаге будем удалять группу самых правых точек. А также поддерживать величину, на которую сместились остальные точки. После удаления группы смещение увеличивается на размер группы. Продолжаем до тех пор, пока не кончатся точки. Надо не забыть про 64-битный тип данных.

Задача C. Половина

Постановка задачи. Дано N яблок. K раз Петя либо отдает половину от всех своих яблок, либо половину одного яблока. Петя не может делить яблоко более чем на две части. Найти, сколько яблок могло остаться у Пети.

Идея решения. Воспользуемся методом динамического программирования. Будем хранить ответы на вопросы «Может ли у Пети быть X яблок, после того, как он встретил Y друзей». Заметим, что X лучше хранить в «половинках» яблок, т. к. их количество всегда целое число.

Пусть у Пети может быть $\boldsymbol{X}$ «половинок» яблок после встречи $\boldsymbol{Y}$ друзей. В какие состояния можно перейти?

- Если у Пети есть хотя бы одна «половинка», он может ее отдать.
- Если у Пети четное число «половинок», то он может отдать половину от всех яблок.

Значит, из состояния динамики ($\boldsymbol{X}$; $\boldsymbol{Y}$), где $\boldsymbol{X}$ – количество яблок, $\boldsymbol{Y}$ – количество уже встреченных друзей, будут следующие переходы:

- Если $\boldsymbol{X > 0}$, тогда ($\boldsymbol{X-1}$; $\boldsymbol{Y+1}$).
- Если X делится на 2, тогда ($\frac{X}{2}$; $\boldsymbol{Y+1}$).

Сложность решение O(N·K).

Задача D. Племя тив

Постановка задачи. Дан список слов в порядке возрастания. Известно, что одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные. Определить порядок букв.

Идея решения. Построим ориентированный граф, вершинами которого будут являться буквы. Определим, для каких пар букв точно известно, что одна меньше другой.

Для этого для каждых двух соседних в списке слов одинаковой длины найдем первую слева позицию, в которой они различаются. Добавим в наш граф ребро из буквы, стоящей на найденной позиции меньшего слова в букву, стоящую на этой же позиции большего слова. Ребро будет обозначать, что буква, из которой выходит ребро меньше буквы, в которую входит это ребро. Если в нашем графе появится цикл, то решения нет. Это можно проверить с помощью обхода в глубину.

Топологически отсортируем полученный граф. Тогда полученное расположение букв будет искомым. Потому что все ребра будут идти слева направо, а это значит, что буква, стоящая левее, будет меньше.