Задача 1. Дети любят фрукты

Доказательство существования и минимальности ответа Сопоставим количество фруктов у двух каких-то детей. Производится два сравнения: одно по яблокам, другое по грушам. Распределение фруктов правильное (при нём все дети довольны) тогда и только тогда, когда результатом должны стать победа первого ребёнка над вторым и победа второго над первым одновременно. Из этого, например, следует, что у двух детей не может быть одинакового количества каких-то фруктов, ведь иначе одно из сравнений завершится ничьей.

Пусть a_i - количество яблок у i-го ребёнка, b_i - количество груш у i-го ребёнка. Рассмотрим какое-то правильное распределение фруктов. Пусть без потери общности a – строго возрастающая последовательность (если это не так, то просто переставим детей таким образом, чтобы условие выполнялось). Из этого следует, что b – строго убывающая последовательность. Действительно, ведь если $a_i > a_j$ при всех $1 \leqslant j \leqslant i-1$, то верно, что $b_i < b_j$ при тех же ограничениях на j, в том числе очевидно, что $b_{i-1} > b_i$.

При этом последовательности a и b – независимые, а значит мы можем минимизировать каждую из них по отдельности. Очевидно, что последовательность с минимальной суммой, подходящая под условия, принимает вид от 1 до n для a и от n до 1 для b (другие минимальные ответы отличаются от этого с точностью до перестановки позиций детей).

За правильно названный ответ начисляется 100 баллов. Иначе 0 баллов.

Задача 2. Числовой шифр

За каждое правильно написанное слово ученик получает 16 баллов, за каждое неправильное теряет 5 баллов. Если он написал 6 верных слов и ни одного неверного, то получит 100 баллов.

Для начала найдем количество подходящих слов. Для этого можно посчитать такие значения: пусть cnt_i — количество слов, которые подходят, если оставить только первые i символов строки. Тогда $cnt_i = cnt_{i-1} + cnt_{i-2}$, если последние два символа образуют число от 1 до 26. Иначе $cnt_i = cnt_{i-1}$. Используя эти значения, найдем все подходящие слова:

```
abcbcdcdedef
abcwdcdedef
awbcdcdedef
awwdcdedef
lcbcdcdedef
lcwdcdedef
```

Задача 3. Миша в комнате

Тесты оцениваются в 30, 30 и 40 баллов соответственно. За первые два можно получить только полный балл за точный ответ либо 0. За третий тест начисляется 20 баллов, если ответ отличается на один +- 1.

Пусть комната имеет размер $N \times M$, а сторона квадрата равна X. Тогда несложно видеть, что минимально возможное количество дней, которое потребуется для уборки, равняется произведению (N/X, округленное вверх) * (M/X, округленное вверх). Далее для обозначения A/B, округленного вверх будет использоваться запись $\lceil \frac{A}{B} \rceil$. Поэтому для каждого случая достаточно просто подобрать нужное X. Для первых двух случаев ответами являются $X = 2$ и $X = 4$ соответственно. Последний тест интереснее, ведь если взять $X = 5$, то получится $\lceil \frac{12}{5} \rceil \cdot \lceil \frac{15}{5} \rceil = 3 \cdot 3 = 9$. Но если взять $X = 6$, то получится $\lceil \frac{12}{6} \rceil \cdot \lceil \frac{15}{6} \rceil = 2 \cdot 3 = 6$ (обратите внимание на необходимость округления вверх частного в этом результате).

Задача 4. Компьютерная игра

Тесты оцениваются в 30, 30, 40 баллов соответственно. За первый два можно получить только полный балл за точный ответ либо 0. За третий тест начилсяется 20 баллов, если ответ отличается на +- 1.

Заметим, что за один взрыв суммарная высота скал уменьшится не более, чем на $1 + 2 + 1 = 4$. Также заметим, что в первых двух примерах надо взорвать две скалы, поэтому нас интересуют только $1 + 2 = 3$ единицы урона.

В первом тесте можно три раза ударить по предпоследней скале, а потом по последней, тогда скалы с номерами 3, 4 и 5 разрушатся. Меньше нельзя, так как за 3 удара удастся нанести максимум 9 урона по скалам, находящимся рядом, но сумма любых двух рядом стоящих больше 9.

Во втором тесте можно ударить два раза по первой и один раз по второй, после чего они разрушатся. Аналогично первому пункту, за 2 удара нельзя.

Как можно было заметить из первых двух тестов, выгодно наносить удары по группам скал с меньшими суммами. В третьем тесте таких групп две — первые три и последние три скалы. Как возможный вариант решения задачи будем пытаться взорвать именно первые. Тогда получаем, что нужное количество скал удастся взорвать за 6 ударов: 5 раз по второй, а затем один раз по третьей.

Задача 5. Изучение кристаллов

Тесты оцениваются в 32, 34, 34 балла соответственно. Можно получить полный балл за точный ответ, половину баллов, если ответ отличается на +- 1, либо 0. Итоговый балл за решение задачи представляет собой сумму баллов за ответы.

Подсчет ответа можно разбить на два этапа: нужно найти день, когда кристалл вырастет в интересующей нас клетке, и день, когда кристалл вырастет на заданную высоту.

Для ответа на первый вопрос нужно научиться считать сколько диагоналей поля будут покрыты кристаллами на i-й день, а также номер диагонали, на которой находится клетка на пересечении столбца X и строки Y. Итак, на i-й день будет покрыто i диагоналей, а наша клетка находится на $(X + Y - 1)$-й из них, то есть клетка окажется покрыта уже в конце $(X + Y - 1)$-го дня.

Дальше нужно рассмотреть три случая:

— если $X = Y = 1$, то в первый и второй дни высота кристалла в клетке составит 1, а затем она будет расти на 2 единицы каждый день;

— если $X = 1$ или $Y = 1$, то на $(X + Y - 1)$-й день высота кристалла в клетке составит 1, в $(X + Y)$-й — 2, а затем она будет расти на 3 единицы каждый день;

— иначе на $(X + Y - 1)$-й день высота кристалла в клетке составит 2, в $(X + Y)$-й высота — 4, а затем она будет расти на 4 единицы каждый день.

Определив к какому из случаев относится текущий эксперимент, мы можем вывести формулу, определяющую через сколько дней кристалл дорастёт до нужной высоты, что в купе с тем, что мы получили на первом этапе, даёт нам ответ.

В первом эксперименте ответ 13.

Во втором эксперименте ответ 26.

В третьем эксперименте ответ 102.